Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dont le tableau de variation est le suivant:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty;-2]$, puis une unique solution β dans $[-2;-1]$.
L'équation $f(x)=0$ admet-elle une solution dans $]-1;+\infty[$?
Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

Sur l'intervalle $]-\infty;-2]$, f est continue et strictement croissante. L'image de $]-\infty;-2]$ par f est $]-\infty;3]$ et $0\in]-\infty;3]$, donc d'après **le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=0$ possède **une solution unique** α dans $]-\infty;-2]$.

Sur l'intervalle $[-2;-1[$, f est continue et strictement décroissante. L'image de $[-2;-1[$ par f est $]-\infty;3]$ et $0\in]-\infty;3]$, donc d'après **le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=0$ possède **une solution unique** β dans $[-2;-1[$.

Sur l'intervalle $]-1;0]$, f est continue et strictement croissante. L'image de $]-1;0]$ par f est $]-\infty;2]$ et $0\in]-\infty;2]$, donc d'après **le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=0$ possède **une solution unique** γ dans $]-1;0]$

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante. L'image de $[0;+\infty[$ par f est $]-\infty;2]$ et $0\in]-\infty;2]$, donc d'après **le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=0$ possède **une solution unique** δ dans $[0;+\infty[$.

On peut en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		-2		β		-1		γ		0		δ		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	3	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	