Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos^3(x)-\sin(3x)$.

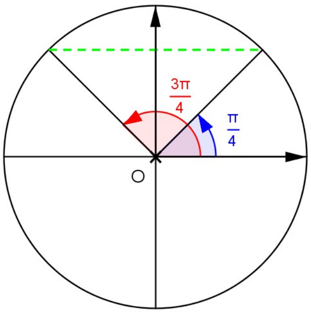
Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$.

En déduire que f s'annule au moins trois fois entre 0 et π .

Correction :

$f(0)=\cos^3(0)-\sin(3\times 0)$
$\boxed{f(0)=1}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)$
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\boxed{f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-2\sqrt{2}}{8}}$



$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos^3(\pi/2)-\sin\left(3\times\frac{\pi}{2}\right)$
$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1}$

$f(\pi)=\cos^3(\pi)-\sin(3\times\pi)$
$\boxed{f(\pi)=-1}$

f est définie et continue sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. $f(0)>0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$ donc d'après **le théorème des valeurs intermédiaires**, il existe au moins une valeur $x_1\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ telle que $\boxed{f(x_1)=0}$

f est définie et continue sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ donc d'après **le théorème des valeurs intermédiaires**, il existe au moins une valeur $x_2\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\boxed{f(x_2)=0}$

f est définie et continue sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ et $f(\pi)<0$ donc d'après **le théorème des valeurs intermédiaires**, il existe au moins une valeur $x_3\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ telle que $\boxed{f(x_3)=0}$

Donc, ***f* s'annule au moins trois fois** entre 0 et π.