Exercice

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 - 3x$.
Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 5$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Correction :

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=3(x^2-1)$

$f'(x)=3(x-1)(x+1)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x-1		$-$		$-$	0	$+$	
x+1		$-$	0	$+$		$+$	
f '(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue sur $]-\infty;1]$. Sur cet intervalle, f admet un maximum qui est 2. Donc l'équation $f(x)=5$ **n'admet pas de solution sur cet intervalle**.

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, f est continue et strictement croissante. L'image de $[1;+\infty[$ par f est $]-2;-\infty]$ et $5\times\ ]-2;-\infty]$, donc d'après **le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=5$ possède **une solution unique** α dans $[1;+\infty[$.

En utilisant la calculatrice, on trouve

$f(2)=3$ et $f(3)=18$ donc $\boxed{\alpha\in]2;3[}$

$f(2)=3$ et $f(2,5)=8,125$ donc $\boxed{\alpha\in]2;2,5[}$

$f(2)=3$ et $f(2,3)=5,267$ donc $\boxed{\alpha\in]2;2,3[}$

$f(2,2)=4,048$ et $f(2,3)=5,267$ donc $\boxed{\alpha\in]2,2;2,3[}$

$f(2,25)=4,640625$ et $f(2,3)=5,267$ donc $\boxed{\alpha\in]2,25;2,3[}$

$f(2,27)=4,887083$ et $f(2,3)=5,267$ donc $\boxed{\alpha\in]2,27;2,3[}$

$f(2,27)=4,887083$ et $f(2,28)=5,012352$ donc $\boxed{\alpha\in]2,27;2,28[}$