Exercice

Montrer que le polynôme $P(x)=-x^3+3x^2+1$ possède une unique racine réelle, et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

Correction :

P est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$P'(x)=-3x^2+6x$$

$$P'(x)=3x(-x+2)$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x)=\lim_{x\to-\infty} -x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$P'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Sur l'intervalle $]-\infty;0]$, P est continue et strictement décroissante. L'image de $]-\infty;0]$ par P est $[1;+\infty[$ et $0\notin[1;+\infty[$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $P(x)=0$ **ne possède pas de solution** dans $\boxed{]-\infty;0]}$.

Sur l'intervalle $[0;2]$, P est continue et strictement croissante. L'image de $[0;2]$ par P est $[1;5]$ et $0\notin[1;5]$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $P(x)=0$ **ne possède pas de solution** dans $\boxed{[0;2]}$.

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, P est continue et strictement décroissante. L'image de $[2;+\infty[$ par P est $]-\infty;5]$ et $0\in]-\infty;5]$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $P(x)=0$ **possède une unique solution** α dans $\boxed{[2;+\infty[}$.

En utilisant la calculatrice, on trouve
$P(3)=1$ et $P(4)=-15$ donc $\boxed{\alpha\in]3;4[}$

$P(3)=1$ et $P(3{,}5)=-5{,}125$ donc $\boxed{\alpha\in]3;3{,}5[}$

$P(3)=1$ et $P(3{,}2)=-1{,}048$ donc $\boxed{\alpha\in]3;3{,}2[}$

$P(3{,}1)=0{,}039$ et $P(3{,}2)=-1{,}048$ donc $\boxed{\alpha\in]3{,}1;3{,}2[}$

$P(3{,}1)=0{,}039$ et $P(3{,}15)\approx-0{,}48$ donc $\boxed{\alpha\in]3{,}1;3{,}15[}$

$P(3{,}1)=0{,}039$ et $P(3{,}12)\approx-0{,}16$ donc $\boxed{\alpha\in]3{,}1;3{,}12[}$

$P(3{,}1)=0{,}039$ et $P(3{,}11)\approx-0{,}06$ donc $\boxed{\alpha\in]3{,}1;3{,}11[}$

Une **valeur approchée** à 10^{-2} près par défaut de l'unique racine réelle de P est **3,10**.