Exercice

On considère l'équation (E): $x^3 - 9x - m(x^2 - 1) = 0$, où m désigne un paramètre réel.

1. Montrer que sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ (E) équivaut à $\frac{x^3-9x}{x^2-1}=m$.

2.A l'aide de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par $f(x) = \frac{x^3-9x}{x^2-1}$, en déduire suivant les valeurs de m le nombre de solutions de (E).

Correction :

1. Sur ℝ\{-1; 1}
$x^3 - 9x - m(x^2 - 1) = 0$
$x^3 - 9x = m(x^2 - 1)$
$\dfrac{x^3-9x}{x^2-1}=m$

2.
f est définie et dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$
Sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

On pose:
$u(x)=x^3-9x$ $\qquad u'(x)=3x^2-9$
$v(x)=x^2-1$ $\qquad v'(x)=2x$

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)(3x^2-9)-2x(x^2-9x)}{(x^2-1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{3x^4-9x^2-3x^2+9-2x^3+18x^2}{(x^2-1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{3x^4+6x^2+9}{(x^2-1)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{3(x^4+2x^2+3)}{(x^2-1)^2}}$$

Sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)>0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\propto$	↗	$+\infty$

Soit m un réel

Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, f est continue et strictement croissante. L'image de $]-\infty;-1[$ par f est $]-\infty;+\infty[$ et $m\in]-\infty;+\infty[$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=m$ possède **une unique solution** α dans $]-\infty;-1[$.

Sur l'intervalle $]-1;1[$, f est continue et strictement croissante. L'image de $]-1;1[$ par f est $]-\infty;+\infty[$ et $m\in]-\infty;+\infty[$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=m$ possède **une unique solution** β dans $]-1;1[$.

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, f est continue et strictement croissante. L'image de $]1;+\infty[$ par f est $]-\infty;+\infty[$ et $m\in]-\infty;+\infty[$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=m$ possède **une unique solution** γ dans $]1;+\infty[$.

Conclusion: pour tout réel m , sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ **l'équation (E) possède 3 solutions**.