Exercice

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+3x^2-12x-6$.

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de *f*.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet 3 solutions. Donner une valeur approchée à 10^{-1} par défaut de ces solutions.

Correction :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty}$

2. Sur $\mathbb{R}$, $f'(x)=6x^2+6x-12$

$f'(x)=6(x^2+x-2)$

$x^2+x-2=0$
$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)$
$\Delta=1+8$
$\Delta=9$

$x_1=\dfrac{-1-3}{2}=-2$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-1+3}{2}=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	14	$\searrow$	-13	$\nearrow$	$+\infty$

3. Sur l'intervalle $]-\infty;-2]$, f est continue et strictement croissante. L'image de $]-\infty;-2]$ par f est $]-\infty;14]$ et $0\in]-\infty;14]$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=0$ **possède une unique solution** α dans $]-\infty;-2]$.

Sur l'intervalle $[-2;1]$, f est continue et strictement décroissante. L'image de $[-2;1]$ par f est $[-13;14]$ et $0\in[-13;14]$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=0$ **possède une unique solution** β dans $[-2;1]$.

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, f est continue et strictement croissante. L'image de $[1;+\infty[$ par f est $[-13;+\infty[$ et $0\in[-13;+\infty[$, donc **d'après le théorème de la bijection**, l'équation $f(x)=0$ **possède une unique solution** γ dans $[1;+\infty[$.

Conclusion:
$f(x)=0$ admet **3 solutions**.

En utilisant la calculatrice, on trouve
$f(-4)<0$ et $f(-3)>0$ donc $\alpha\in]-4;-3[$
$f(-3{,}5)<0$ et $f(-3)>0$ donc $\alpha\in]-3{,}5;-3[$
$f(-3{,}3)<0$ et $f(-3)>0$ donc $\alpha\in]-3{,}3;-3[$
$f(-3{,}2)<0$ et $f(-3{,}1)>0$ donc $\alpha\in]-3{,}2;-3{,}1[$
Donc $\boxed{\alpha\approx-3{,}2}$

$f(-2)>0$ et $f(0)<0$ donc $\beta\in]-2;0[$
$f(-1)>0$ et $f(0)<0$ donc $\beta\in]-1;0[$
$f(-0{,}5)>0$ et $f(0)<0$ donc $\beta\in]-0{,}5;0[$
$f(-0{,}5)>0$ et $f(-0{,}4)<0$ donc $\beta\in]-0{,}5;-0{,}4[$
Donc $\boxed{\beta\approx-0{,}5}$

$f(2)<0$ et $f(3)>0$ donc $\gamma\in]2;3[$
$f(2)<0$ et $f(2{,}5)>0$ donc $\gamma\in]2;2{,}5[$
$f(2)<0$ et $f(2{,}1)>0$ donc $\gamma\in]2;2{,}1[$ Donc $\boxed{\gamma\approx2}$