Calculs de dérivées.

Compléments.

1. Nombre dérivé- Tangente à une courbe- Dérivée d'une fonction

1.1. Nombre dérivé

Dans ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.

a) *Fonction dérivable en a*

Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est dérivable en a lorsque **le taux d'accroissement** (ou taux de variation) de f en a admet **une limite finie** L en a, c'est-à-dire lorsque : $\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L}$

ou, en posant $x=a+h$, $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L}$

b) *Nombre dérivé*

Si f est dérivable en a alors ***L* est appelé le nombre dérivé** de f en a, et on le note $f'(a)$.

c) *Remarque*

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative de f admet au point $A(a ; f(a))$ **une tangente** de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette tangente a pour **équation** $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

d) *Approximation*

Lorsque f est dérivable en a, la fonction f admet une approximation affine au voisinage de a:

$$\boxed{f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)}$$

e) *Définition*

On dit que f est **dérivable sur *I*** lorsque f est dérivable en **tout réel** x de I. La fonction notée f', qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$, est appelée fonction dérivée de f .

1.2. Remarque

a) Si f est **une fonction dérivable** sur une intervalle I alors f est **continue** sur cet intervalle.
On admet ce résultat.

b) La réciproque est fausse.

Si une fonction est **continue** en a alors cette fonction **n'est pas obligatoirement dérivable** en a.

Exemple :
$f(x)=|x|$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} |x|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-x)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |x|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x)=0$

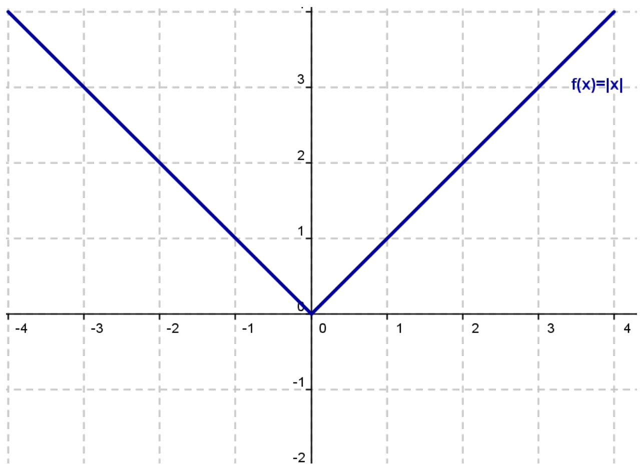
Donc, $\lim\limits_{x\to 0} |x|=|0|=0$

Donc,
f est continue en 0.

Si $x<0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{-x}{x}=-1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$

Si $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x}{x}=1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

Donc,
f n'est pas dérivable en 0.



1.3. Dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
k (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x^n , $n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

1.4. Dérivée et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I. k est un nombre réel.

Fonction	*Dérivée*
$k\times u$	$k\times u'$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$ (v ne s'annulant pas)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ (v ne s'annulant pas)	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

1.5. Variations et extremum d'une fonction dérivable

a) *Théorème*

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x)=0$ alors la fonction f est **une fonction constante sur *I*** (c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que pour tout nombre réel de I on ait $f(x)=k$).
- Si pour tout x de I, $f'(x)>0$ (sauf peut-être en quelques valeurs isolées où $f'(x)$ s'annule) alors la fonction f est **une fonction strictement croissante sur *I***.
- Si pour tout x de I, $f'(x)<0$ (sauf peut-être en quelques valeurs isolées où $f'(x)$ s'annule) alors la fonction f est **une fonction strictement décroissante sur *I***.

b) *Extremum d'une fonction dérivable*

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- Si f admet **un extremum local** en x_0 alors $f'(x_0)=0$.
- Si f' **s'annule en changeant de signe** en x_0 alors f **admet un extremum local** en x_0 .
- Remarque :
  Si $f'(x_0)=0$ alors la fonction f n'admet pas nécessairement un extremum local en x_0 .

  Exemple : $f(x)=x^3$
  f est dérivable sur ℝ et $f'(x)=3x^2$
  $f'(0)=0$ et f est strictement croissante sur ℝ donc f n'admet pas d'extremum local en x_0 .

2. Dérivée d'une fonction composée

2.1. Théorème

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que toutes les valeurs $u(x)$ appartiennent à un intervalle J, et soit v une fonction définie et dérivable sur J. Alors $v\circ u$ est **dérivable** sur I et $\boxed{(v\circ u)'=v'\circ u\times u'}$.

Démonstration :

Soit a un nombre appartenant à I.

On va montrer que $v\circ u$ est dérivable en a en étudiant la limite de son taux d'accroissement.

Pour tout x appartenant à $I-\{a\}$,

$$\frac{v\circ u(x)-v\circ u(a)}{x-a}=\frac{v\circ u(x)-v\circ u(a)}{u(x)-u(a)}\times\frac{u(x)-u(a)}{x-a}$$

On s'intéresse d'abord au second facteur de ce produit.

Comme u est dérivable sur I, elle l'est en a et $\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)-u(a)}{x-a}=u'(a)$, nombre réel.

De plus, $\lim\limits_{x\to a}u(x)-u(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)-u(a)}{x-a}\times(x-a)=u'(a)\times 0=0$

donc $\lim\limits_{x\to a}u(x)=u(a)$.

On s'intéresse ensuite au premier facteur de ce produit.

On vient de voir que $\lim\limits_{x\to a}u(x)=u(a)$. On pose alors $X=u(x)$.

Comme v est dérivable sur J, elle l'est en $u(a)$ et $\lim\limits_{X\to u(a)}\frac{v(X)-v(u(a))}{X-a}=v'(u(a))$.

Alors, par combinaison des limites, $\lim\limits_{x\to a}\frac{v\circ u(x)-v\circ u(a)}{u(x)-u(a)}=v'(u(a))$

Enfin, par produit, $\lim\limits_{x\to a}\frac{v\circ u(x)-v\circ u(a)}{x-a}=v'(u(a))\times u'(a)$

Ceci étant valable pour tout a appartenant à I, on vient de prouver que $v\circ u$ est dérivable sur I et $(v\circ u)'=v'\circ u\times u'$

2.1. Remarque

Il faut retenir les cas particuliers suivants : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si n est un entier naturel non nul : $\boxed{(u^n)'=nu^{n-1}\times u'}$
- Si n est un entier naturel non nul, et si u ne s'annule pas sur I : $\boxed{\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{nu'}{u^{n+1}}}$

- Si pour tout x appartenant à I, $u(x)\geqslant 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable pour tout x tel que $u(x)>0$ et : $\boxed{(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.
- $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$, $g(x)=f(ax+b)$. Si f est dérivable en ax_0+b alors g est dérivable en x_0 et : $\boxed{g'(x_0)=a f'(ax_0+b)}$

3. Fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, donc :

$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$ et $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

3.1. Exemples de limites de fonctions trigonométriques

a) On admet que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

b) Calculer les limites de $\frac{\sin 2h}{h}$ et $\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}$ lorsque h tend vers 0.

$$\lim_{h\to 0} 2h=0 \text{ et } \lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1 \text{ donc } \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}=1 \text{ et donc } \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}=2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{2}=0 \text{ et } \lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1 \text{ donc } \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1 \text{ et donc } \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}=\frac{1}{2}$$

On peut facilement vérifier que pour $a\in\mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin ah}{h}=a$ ou $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$

c) Calculer la limite de $\frac{\cos h-1}{h}$ lorsque h tend vers zéro.

On utilise les formules de duplication :
Pour tout nombre réel a :

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$
$\cos 2a=2\cos^2 a-1$
$\cos 2a=1-2\sin^2 a$

On obtient donc, pour tout réel h :

$$\cos h=1-2\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2$$

Donc, $\cos h-1=-2\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2$

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -2\frac{\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2}{h} = -2\times\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\times\sin\frac{h}{2}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{h\to 0}\sin\frac{h}{2} = \sin\frac{0}{2} = 0$

Conséquence :

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0}$$

3.2. Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus en 0

a) On a $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$

Or, $\frac{\sin h}{h} = \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h}$

Il s'agit du taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et $0+h$. Ce taux admet pour limite 1 lorsque h tend vers 0, donc :

La fonction sinus est **dérivable en zéro** et $\boxed{\sin'(0) = 1}$.

b) On a $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$

Or, $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos(0+h) - \cos(0)}{h}$

Il s'agit du taux d'accroissement de la fonction cosinus entre 0 et $0+h$. Ce taux admet pour limite 0 lorsque h tend vers 0, donc :

La fonction cosinus est **dérivable en zéro** et $\boxed{\cos'(0) = 0}$.

3.3. Dérivabilité de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$

Soit x_0 un nombre réel et $h \in \mathbb{R}^*$.

$\frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction sinus entre x_0 et x_0+h .

On utilise la formule d'addition :

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(x_0+h) = \sin x_0\cos h + \cos x_0\sin h$

$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{\sin x_0\cos h + \cos x_0\sin h - \sin x_0}{h} = \sin x_0\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x_0\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$

Donc, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \cos x_0$

Conclusion :

La fonction sinus est **dérivable sur ℝ** et sa fonction dérivée est la fonction cosinus : $\sin' = \cos$.

3.4. Dérivabilité de la fonction cosinus sur ℝ

Soit x_0 un nombre réel et $h \in \mathbb{R}^*$.
$\dfrac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction cosinus entre x_0 et x_0+h .

On utilise la formule d'addition :
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(x_0+h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h$

$$\frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} = \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} = \cos x_0 \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x_0 \left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

Donc, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} = -\sin x_0$

Conclusion :

La fonction cosinus est **dérivable sur ℝ** et sa fonction dérivée est l'opposée de la fonction sinus : $\cos' = -\sin$.

3.5. Remarques

Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I alors la fonction $f = \sin(u)$ est dérivable sur I et $\boxed{f' = [\sin(u)]' = \cos(u) \times u'}$.

Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I alors la fonction $g = \cos(u)$ est dérivable sur I et $\boxed{g' = [\cos(u)]' = -\sin(u) \times u'}$.

Cas particuliers :
Si $u(x) = ax+b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, alors la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \sin(ax+b)$ est dérivable sur ℝ et $\boxed{f'(x) = [\sin(ax+b)]' = [f(ax+b)]' = a \cos(ax+b)}$.

Si $u(x)=ax+b$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$, alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{g'(x)=[\cos(ax+b)]'=[g(ax+b)]'=-a\sin(ax+b)}$.

4. Compléments

4.1. Dérivées successives

Soit f une fonction définie et dérivable sur I.

- Si f' est dérivable sur I, alors on note sa dérivée f'' et c'est la dérivée seconde de f.
- Si f'' est dérivable sur I, alors on note sa dérivée f''' ou $f^{(3)}$ et c'est la dérivée d'ordre 3 de f.
- Si on le peut, on peut définir la dérivée d'ordre 4 $(f^{(4)})$, et ainsi de suite.

Exemple

Pour $f(x)=\cos(x)$, définie sur $\mathbb{R}$, calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 4.

$f'(x)=-\sin(x)$, $f''(x)=-\cos(x)$, $f^{(3)}(x)=\sin(x)$, $f^{(4)}(x)=\cos(x)=f(x)$.

4.2. Utilisation du taux d'accroissement pour le calcul de limites

Calculer la limite en $\frac{\pi}{4}$ de $\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$.

On obtient une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x-\cos x$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$$

$$\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

On a le taux d'accroissement de f entre $\frac{\pi}{4}$ et x.

Or, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\cos x+\sin x$.

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$