Exercice

Étudier la dérivabilité en 2 de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-3}$

2. $g(x)=\sqrt{x-2}$

3. $h(x)=\sqrt{x-2}\sin(x-2)$

4. $\mathrm{j}(x)=\sin(\sqrt{x-2})$

Correction :

1. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{(2+h)^2}{2h+1}-\dfrac{4}{1}\right)=\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{4+4h+h^2}{2h+1}-4\right)=\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{4+4h+h^2-8h-4}{2h+1}\right)=\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{h(h-4)}{2h+1}\right)=\dfrac{h-4}{2h+1}$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-4}{2h+1}=-4$

Donc, f **est dérivable en 2** et $\boxed{f'(2)=-4}$

2. Pour h>0, $\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$

Or $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{h}}=+\infty}$

Donc, g **n'est pas dérivable en 2**.

3. Pour u>0, $\dfrac{h(2+u)-h(2)}{u}=\dfrac{\sqrt{u}\sin(u)-\sqrt{0}\sin(0)}{u}=\sqrt{u}\dfrac{\sin(u)}{u}$

Or, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin(u)}{u}=1$ et $\lim\limits_{u\to 0}\sqrt{u}=0$

Donc, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{h(2+u)-h(2)}{u}=0$

Donc, h **est dérivable en 2** et $\boxed{h'(2)=0}$

4. Pour h>0, $\dfrac{j(2+h)-j(2)}{h}=\dfrac{\sin(\sqrt{h})-\sin(\sqrt{0})}{h}=\dfrac{\sin(\sqrt{h})}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}\times\dfrac{\sin(\sqrt{h})}{\sqrt{h}}$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(\sqrt{h})}{\sqrt{h}}=1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$

Donc, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{j(2+u)-j(2)}{u}=+\infty$

Donc, j **n'est pas dérivable en 2**.