Exercice

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I, et soit a un réel appartenant à I. Rappeler la définition de l'approximation affine de f au voisinage de a.

2. (a) Appliquer cette formule pour les fonctions et les valeurs a suivantes :

– $f(x)=\sqrt{x}$, et $a=1$;

– $f(x)=\sin x$, et $a=0$;

– $f(x)=x^n$, où n est un entier naturel, et $a=1$;

– $f(x)=\dfrac{1}{x}$, et $a=1$.

(b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1{,}01}$, de $\sin 0{,}1$, de $1{,}001^3$ et de $\dfrac{1}{1{,}001}$.

Correction :

1. Lorsque f est **dérivable en a**, la fonction f **admet une approximation affine au voisinage de a**:

$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)}$

2. (a)

✔ $\sqrt{x} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1)$

$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1)$

$\boxed{\sqrt{x} \approx \frac{1}{2}(x+1)}$

✔ $\sin x \approx \sin 0 + \cos 0 (x-0)$

$\boxed{\sin x \approx x}$

✔ On suppose n>0

$x^n \approx 1^n + n \times 1^{n-1}(x-1)$

$\boxed{x^n \approx 1 + n(x-1)}$

✔ $\frac{1}{x} \approx \frac{1}{1} - \frac{1}{1^2}(x-1)$

$\frac{1}{x} \approx 1 - (x-1)$

$\boxed{\frac{1}{x} \approx -x+2}$

(b)

✔ $\sqrt{1{,}01} \approx \frac{1}{2}(1{,}01+1)$

$\boxed{\sqrt{1{,}01} \approx 1{,}005}$

✔ $\boxed{\sin 0{,}1 \approx 0{,}1}$

✔ $1{,}001^3 \approx 1 + 3(1{,}001-1)$

$\boxed{1{,}001^3 \approx 1{,}003}$

✔ $\frac{1}{1{,}001} \approx -1{,}001 + 2$

$\boxed{\frac{1}{1{,}001} \approx 0{,}999}$