Exercice

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ par $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x+1}$

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'ensemble de définition. En déduire les équations des asymptotes à la courbe représentative de f.

2. Calculer la fonction dérivée de f et son signe.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Construire la courbe représentative de f dans le repère précédent.

5. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse O et construite (T) dans le même repère.

Correction :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$.

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

$\lim\limits_{x\to-1}(x-2)=-3$

Signe de $x+1$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$	

Donc :

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{4}{x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{4}{x+1}=+\infty$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=-\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=+\infty}$

Par conséquent, la droite d'équation $\boxed{x=-1}$ est **une asymptote verticale à la courbe représentative** de f .

$f(x)-(x-2)=\dfrac{4}{x+1}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$

Par conséquent, la droite d'équation $\boxed{y=x-2}$ est **une asymptote oblique à la courbe représentative** de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ et :

$$f'(x)=1+\frac{-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

Le signe de f' est le signe du trinôme $(x-1)(x+3)$; les racines sont 1 et -3 et le coefficient de x^2 est positif.

Si $x\in]-\infty;-3[$ ou $x\in]1;+\infty[$ alors $\boxed{f'(x)>0}$

Si $x\in]-3;-1[$ ou $x\in]-1;1[$ alors $\boxed{f'(x)<0}$

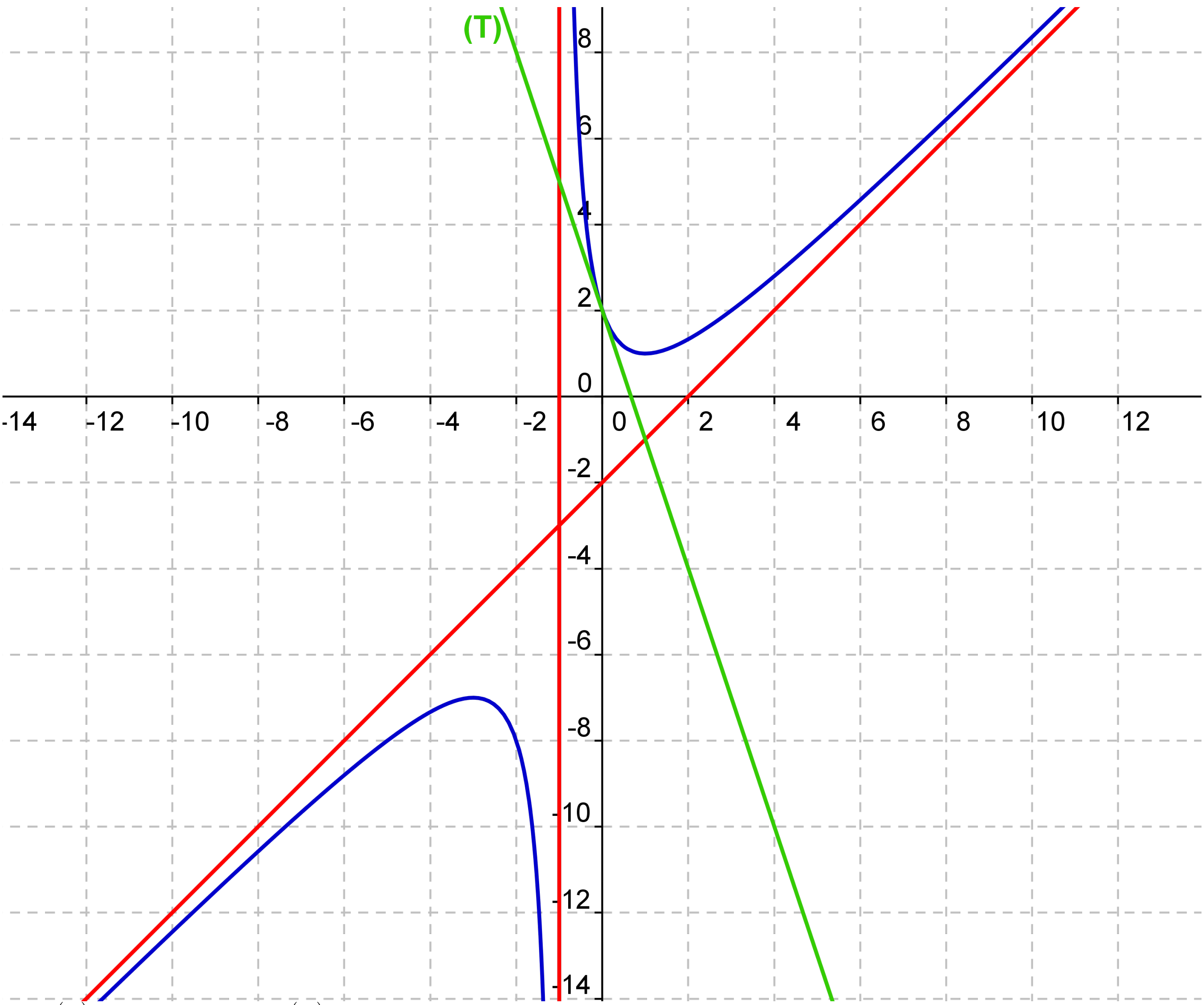
3.

$f(1)=-1+\frac{4}{2}=1$ et

$f(-3)=-5-1=-6$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4.



5. $f(0)=-2+4=2$ et $f'(0)=-3$

L'équation de la tangente (T) au point $A(0;2)$ à la courbe représentative de f est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$
donc $\boxed{y=-3x+2}$

