Exercice

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ par $f(x)=x+3\sqrt{x^2-1}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer la fonction dérivée de f sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et son signe.

3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f .

4. Dresser le tableau de variations de f .

5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-4x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)$. En déduire les équations des asymptotes à la courbe représentative de f .

6. Construire la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Correction :

1. $\lim_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

Donc, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

En effectuant le même raisonnement en $-\infty$, on obtient une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ »

On suppose $x\in]-\infty;-1[$ (donc $x<0$)

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

Or, $\sqrt{x^2}=-x$ (car $x<0$)

$$\sqrt{x^2-1}=-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

Donc, $f(x)=x-3x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=x\left[1-3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x^2}=1$ et $\lim_{X\to1}\sqrt{X}=1$ donc $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1$.

Et, $\lim_{x\to-\infty}1-3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-2$

$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

Donc, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

2. $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$u(x)=x^2-1$ $\qquad u'(x)=2x$

u est strictement positive lorsque $x\in]-\infty;-1[$ ou $x\in]1;+\infty[$

$$f'(x)=1+\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Si $x\in]1;+\infty[$ alors $f'(x)>0$

$$f'(x)=1+\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+3x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Si $x \in]-\infty;-1[$, le signe de f' est du signe de $\sqrt{x^2-1}+3x$

$$\sqrt{x^2-1}+3x=\frac{x^2-1-9x^2}{\sqrt{x^2-1}-3x}=\frac{-8x^2-1}{\sqrt{x^2-1}-3x}$$

Le numérateur est strictement négatif et le dénominateur est strictement positif.

Donc $\boxed{f'(x)<0}$

3. $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x+3\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}=1+3\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=1+3\dfrac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=1+3\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x^2-1}=0$ (par valeurs positives).

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+1=2$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$

Et, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

f est continue à droite en 1 et son taux d'accroissement entre 1 et x (avec $x>1$)admet une limite infinie donc f **n'est pas dérivable à droite en 1** mais la courbe représentative de f admet **une demi-tangente verticale** au point $A(1;1)$.

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{x+3\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}=1+3\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}=1+3\frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=1+3\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \sqrt{x^2-1}=0$ (par valeurs positives).

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x-1=-2$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=-\infty$

Et, donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-\infty$

f est continue à gauche en -1 et son taux d'accroissement entre -1 et x (avec $x<-1$)admet une limite infinie donc f **n'est pas dérivable à gauche en -1** mais la courbe représentative de f admet **une demi-tangente verticale** au point $B(-1;-1)$.

4.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de f ' (x)		$-$	||		||	$+$	
Variations de f(x)	$+\infty$	↘	-1		1	↗	$+\infty$

5. $x\in[1;+\infty[$

$$f(x)-4x=x+3\sqrt{x^2-1}-4x=3\sqrt{x^2-1}-3x=\frac{(3\sqrt{x^2-1}-3x)(3\sqrt{x^2-1}+3x)}{3\sqrt{x^2-1}+3x}=\frac{9(x^2-1)-9x^2}{3\sqrt{x^2-1}+3x}$$

$$f(x)-4x=\frac{-9}{3\sqrt{x^2-1}+3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3\sqrt{x^2-1}+3x=+\infty$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=0$

Conséquence : la droite d'équation $\boxed{y=4x}$ est **une asymptote oblique à la courbe représentative** en $+\infty$.

$x\in]-\infty;-1]$

$$f(x)+2x=x+3\sqrt{x^2-1}+2x=3\sqrt{x^2-1}+3x=\frac{(3\sqrt{x^2-1}+3x)(3\sqrt{x^2-1}-3x)}{2\sqrt{x^2-1}-3x}=\frac{9(x^2-1)-9x^2}{3\sqrt{x^2-1}-3x}$$

$$f(x)+2x=\frac{-9}{3\sqrt{x^2-1}-3x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3\sqrt{x^2-1}-3x=+\infty$$

Donc, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=0$

Conséquence : la droite d'équation $\boxed{y=2x}$ est **une asymptote oblique à la courbe représentative** en $-\infty$.

6.