La fonction exponentielle.

1. Définition de la fonction exponentielle

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur ℝ telles que $f'=f$ et $f(0)=1$.

1.1. Propriété

S'il existe une fonction f dérivable sur ℝ telles que $f'=f$ et $f(0)=1$ alors f ne s'annule pas sur ℝ. (c'est à dire pour tout x réel $f(x)\neq 0$)

<u>Démonstration :</u>

f est une fonction dérivable sur ℝ telle que pour tout nombre réel x : $f'(x)=f(x)$ et $f(0)=1$.

On considère la fonction φ définie sur ℝ par $\varphi(x)=f(x)\times f(-x)$.

$f(-x)=f(ax+b)$ avec $a=-1$ et $b=0$

$[f(-x)]'=-f'(-x)=-f(-x)$

φ est dérivable sur ℝ (produit de deux fonctions dérivables)

Pour tout x réel,

$\varphi'(x)=f'(x)\times f(-x)+f(x)\times(-f(-x))$

$\varphi(x)=f(x)\times f(-x)-f(x)\times f(-x)$

$\varphi(x)=0$

φ est une fonction constante sur ℝ, donc pour tout x réel :

$\varphi(x)=\varphi(0)=f(0)\times f(-0)=f(0)\times f(0)=1\times 1=1$

S'il existait un nombre réel tel que $f(a)=0$ alors $\varphi(a)=f(a)\times f(-a)=0$, ce qui est une contradiction avec $\varphi(x)=1$ pour tout x réel.

Conséquence : il n'existe pas de réel a tel que $f(a)=0$ donc f ne s'annule pas sur ℝ.

<u>Remarque :</u>

pour tout x réel :

$\varphi(x)=1=f(x)\times f(-x)$

Donc, $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

1.2. Théorème

Il existe une et une seule fonction f dérivable sur ℝ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.

Démonstration :

L'existence d'une solution est admise.

On démontre simplement l'unicité.

Cette démonstration peut être demandée en restitution des connaissances au baccalauréat.

On considère f et g deux fonctions dérivables sur ℝ telles que :

$f'(x)=f(x)$ et $g'(x)=g(x)$ et $f(0)=g(0)=1$.

On considère pour tout nombre réel x , $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$

h est une fonction dérivable sur ℝ.

$$h'(x)=\frac{f(x)\times g'(x)-f'(x)\times g(x)}{[f(x)]^2}$$

$$h'(x)=\frac{f(x)\times g(x)-f(x)\times g(x)}{[f(x)]^2}$$

$$h'(x)=0$$

h est une fonction constante sur ℝ donc tout nombre réel x , $h(x)=h(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=1$.

Donc, $\frac{g(x)}{f(x)}=1$ et $g(x)=f(x)$.

La fonction f est donc unique.

1.3. Définition

On nomme **fonction exponentielle**, l'unique fonction f dérivable sur ℝ, telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.

On note $\boxed{f(x)=\text{EXP}(x)}$.

Conséquences :

Pour tout nombre réel x :

$\text{EXP}'(x)=\text{EXP}(x)$

$\text{EXP}(-x)=-\text{EXP}(x)$

$\text{EXP}(0)=1$

1.4. Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et b :

$\boxed{\text{EXP}(a+b)=\text{EXP}(a)\times\text{EXP}(b)}$

Démonstration :

a et b sont deux nombres réels fixés, et on considère la fonction g définie sur ℝ par :

$g(x)=\mathrm{EXP}(a+b-x)\times\mathrm{EXP}(x)$

g est dérivable sur ℝ et :

$g'(x)=[\mathrm{EXP}(a+b-x)]'\times\mathrm{EXP}(x)+\mathrm{EXP}(a+b-x)\times[\mathrm{EXP}(x)]'$

Or, $[\mathrm{EXP}(a+b-x)]'=-\mathrm{EXP}'(a+b-x)$

$[\mathrm{EXP}(a+b-x)]'=-\mathrm{EXP}(a+b-x)$

et, $[\mathrm{EXP}(x)]'=\mathrm{EXP}(x)$

Donc,

$g'(x)=-\mathrm{EXP}(a+b-x)\times\mathrm{EXP}(x)+\mathrm{EXP}(a+b-x)\times\mathrm{EXP}(x)=0$

g est une fonction constante sur ℝ, donc pour tout nombre réel x :

$g(x)=g(0)=\mathrm{EXP}(a+b)\times\mathrm{EXP}(0)=\mathrm{EXP}(a+b)$

et $g(x)=g(b)=\mathrm{EXP}(a)\times\mathrm{EXP}(b)$

Donc, $\mathrm{EXP}(a+b)=\mathrm{EXP}(a)\times\mathrm{EXP}(b)$

1.5. Conséquences

Pour tous nombres réels a et b :

$$\boxed{\mathrm{EXP}(-a)=\frac{1}{\mathrm{EXP}(a)}}$$

$$\boxed{\mathrm{EXP}(2a)=[\mathrm{EXP}(a)]^2}$$

$$\boxed{\mathrm{EXP}(a-b)=\frac{\mathrm{EXP}(a)}{\mathrm{EXP}(b)}}$$

$$\boxed{\mathrm{EXP}(a)>0}$$

Démonstration :

- Nous avons déjà démontré que pour tout réel a :

$\mathrm{EXP}(a)\times\mathrm{EXP}(-a)=1$

soit $\mathrm{EXP}(-a)=\dfrac{1}{\mathrm{EXP}(a)}$

- $\mathrm{EXP}(2a)=\mathrm{EXP}(a+a)=\mathrm{EXP}(a)\times\mathrm{EXP}(a)=[\exp(a)]^2$
- $\mathrm{EXP}(a-b)=\mathrm{EXP}(a)\times\mathrm{EXP}(-b)=\mathrm{EXP}(a)\times\dfrac{1}{\mathrm{EXP}(b)}=\dfrac{\mathrm{EXP}(a)}{\mathrm{EXP}(b)}$
- $\mathrm{EXP}(a)=\mathrm{EXP}\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\right)=\left[\mathrm{EXP}\left(\dfrac{a}{2}\right)\right]^2>0$

car on a démontré que $\exp\left(\dfrac{a}{2}\right)\neq 0$

1.6. Proposition

Pour tout nombre réel a et tout entier relatif n :

$\boxed{\mathrm{EXP}(na)=[\mathrm{EXP}(a)]^n}$

Démonstration :
On effectue un raisonnement par récurrence pour $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation :
Pour $n=0$, $\exp(0\times a)=\exp(0)=1$ et $[\exp(a)]^0=1$
Donc : $\mathrm{EXP}(0\times a)=[\mathrm{EXP}(a)]^0$

On démontre l'hérédité de la propriété pour tout entier naturel.
On suppose (hypothèse de récurrence) que $\mathrm{EXP}(na)=[\mathrm{EXP}(a)]^n$

$$\mathrm{EXP}[(n+1)a]=\mathrm{EXP}[na+a]=\mathrm{EXP}(na)\times\mathrm{EXP}(a)=[\mathrm{EXP}(a)]^n\times\mathrm{EXP}(a)=[\mathrm{EXP}(a)]^{n+1}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence :

Pour tout nombre réel a et tout entier relatif n :

$$\mathrm{EXP}(na)=[\mathrm{EXP}(a)]^n$$

Pour $n\in\mathbb{Z}$ et $n<0$

$n=-p$ avec $p\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{EXP}(na)=\mathrm{EXP}(-pa)=\frac{1}{\mathrm{EXP}(pa)}=\frac{1}{[\mathrm{EXP}(a)]^p}=[\mathrm{EXP}(a)]^{-p}=[\mathrm{EXP}(a)]^n$$

1.7. Le nombre e

Définition: L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e, c'est à dire $\boxed{\mathrm{EXP}(1)=\mathrm{e}}$.

Une valeur approchée de e est 2,718

Remarque :

Pour tout entier relatif n

$$\mathrm{EXP}(n)=\mathrm{EXP}(n\times 1)=[\mathrm{EXP}(1)]^n=\mathrm{e}^n$$

Notation définitive :

Pour tout nombre réel x , on note $\mathrm{EXP}(x)=\mathrm{e}^x$ (c'est à dire on définit les exposants réels pour le nombre e)

Conséquences :

- La fonction exponentielle : $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même : pour tout nombre réel x : $(e^x)'=e^x$
- $e^0=1$
- Pour tout nombre réel x : $e^x>0$
- Pour tous nombres réels a et b : $e^{a+b}=e^a\times e^b$; $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout nombre réel a et tout entier relatif n : $(e^a)^n=e^{na}$

2. Étude de la fonction exponentielle

2.1. Variation de la fonction exponentielle

$\mathrm{EXP}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \longmapsto \mathrm{EXP}(x)=e^x$

$\mathrm{EXP}'(x)=(e^x)'=e^x>0$

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

2.2. Limite en + ∞

$h:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \longmapsto e^x-x$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x)=e^x-1$

h' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h''(x)=e^x>0$

donc, h' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$h'(0)=e^0-1=0$

Si $x<0$ alors $h'(x)<h'(0)=0$

Si $x>0$ alors $h'(x)>h'(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de h ' (x)		—	0	+	
Variations de h (x)		↘	1	↗	

$h(0)=e^0-0=1$

<u>Conséquence :</u>

$h(0)=1$ est le minimum de h sur ℝ.

Donc, pour tout nombre réel x , $h(x)\geqslant 1$ soit $e^x-x\geqslant 1$ et $e^x\geqslant x+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty}$.

2.3. Limites en -∞

$e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

$\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}=0$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0}$

2.4. Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de e^x		+	
variations de e^x	0	↗	$+\infty$

2.5. Remarque

On considère le rapport $\frac{e^h-1}{h}$ pour $h\in\mathbb{R}^*$.

On a $e^h=e^{0+h}$ et $e^0=1$

$$\frac{e^h-1}{h}=\frac{e^{0+h}-e^0}{h}$$

Il s'agit du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et h.

La fonction exponentielle est dérivable en 0.

Donc, $\lim\limits_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=\text{EXP}'(0)=\text{EXP}(0)=1$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1}$

2.6. Représentation graphique

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

La courbe représentative de la fonction exponentielle passe par les points $A(0;1)$ et $B(1;e)$.

On détermine les équations des tangentes en ces points.

Au point $A(0;1)$:

$f'(0)=1$ et $f(0)=1$ $\qquad y=f'(0)(x-0)+f(0)$

(T) : $y=x+1$

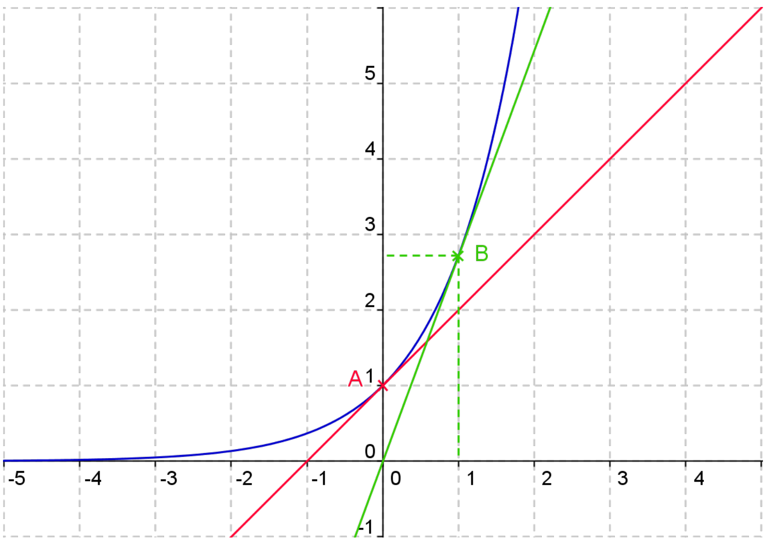
Au point $B(1;e)$:

$f'(1)=f(1)=e$ $\qquad y=f'(1)(x-1)+f(1)$

(T') : $y=e(x-1)+e$

(T') : $y=ex$

Cette tangente passe par l'origine.



Remarque :

Nous avons démontré que pour tout nombre réel x : $e^x \geqslant x+1$.

La courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la tangente au point $A(0;1)$.

2.7. Équation e^x=m

a) Pour tout nombre réel x : $e^x > 0$

Donc, si $m \leqslant 0$ alors l'équation $e^x = m$ **n'admet aucune solution** dans $\mathbb{R}$.

b) La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que pour tout nombre réel m strictement positif, l'équation $e^x = m$ **admet une unique solution**.

En particulier, l'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est 0.

c) a et b sont des nombres réels.

$$e^a = e^b \Leftrightarrow \frac{e^a}{e^b} = 1 \Leftrightarrow e^{a-b} = 1 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$$

d) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

3. Compléments

3.1. Limite 1

On la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

g est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$g'(x) = e^x - x$

Or, nous avons vu que pour tout nombre réel x , $e^x \geqslant x+1$

Donc, pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $g'(x) \geqslant 1 > 0$.

Donc, g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $g(0) = 1-0 = 1$.

Pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $g(x) \geqslant g(0) = 1 > 0$, et $e^x > \dfrac{x^2}{2}$.

Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2}=+\infty$ donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty}$.

3.2. Limite 2

$$xe^x=\frac{x}{e^{-x}}=\frac{1}{\frac{e^{-x}}{x}}=-\frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x}=+\infty$.

Et, $\lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{1}{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}}=0$

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0}$

3.3. Dérivée de $e^{u(x)}$

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{\text{EXP}} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto u(x) \longmapsto \text{EXP}(u(x))=e^{u(x)}$$

Si u est dérivable sur I alors EXP o u=EXP(u) est dérivable sur I et :

(EXP o u)'=EXP'(u(x))×u'(x)=EXP(u(x))×u'(x).

$\boxed{(e^{u(x)})'=u'(x)\times e^{u(x)}}$