

Exercice

Pour tout nombre réel x , vérifier les égalités suivantes :

$$1. \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$$

$$2. (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$$

$$3. (e^x + e^{-x})^4 = e^{4x} + \frac{1}{e^{4x}} + 4 \left(e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} \right) + 6$$

Correction :

$$1. \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x \times e^x - 1}{e^x \times e^x + 1} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\begin{aligned} 2. & (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \\ &= (e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 - [(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2] \\ &= e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^0 + 2e^0 \\ &= \boxed{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & (e^x + e^{-x})^4 = [(e^x + e^{-x})^2]^2 = (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x})^2 \\ &= (e^{2x})^2 + 2^2 + (e^{-2x})^2 + 2 \times 2e^{2x} + 2 \times e^{2x} \cdot e^{-2x} + 2 \times 2e^{-2x} \\ &= e^{4x} + 4 + e^{-4x} + 4e^{2x} + 2 + 4e^{-2x} \\ &= \boxed{e^{4x} + \frac{1}{e^{4x}} + 4 \left(e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} \right) + 6} \end{aligned}$$

Remarque :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$