Exercice

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=xe^{x}$ définie sur ℝ
2. $f(x)=(2x^2+5x-7)\mathrm{e}^{x}$ définie sur ℝ
3. $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
4. $f(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x}}$ définie sur ℝ
5. $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{5x-4}$ définie sur ℝ
6. $f(x)=x^2 e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Correction :

1. $f(x)=xe^x$ définie sur $\mathbb{R}$

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)v(x)$ avec :

$u(x)=x$ $\quad$ $u'(x)=1$

$v(x)=\mathrm{e}^x$ $\quad$ $v'(x)=\mathrm{e}^x$

Pour tout nombre réel,

$\boxed{f'(x)=1\times\mathrm{e}^x+xe^x=(1+x)\mathrm{e}^x}$

2. $f(x)=(2x^2+5x-7)\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)v(x)$ avec :

$u(x)=2x^2+5x-7$ $\quad$ $u'(x)=4x+5$

$v(x)=\mathrm{e}^x$ $\quad$ $v'(x)=\mathrm{e}^x$

Pour tout nombre réel,

$f'(x)=(4x+5)\mathrm{e}^x+(2x^2+5x-7)\mathrm{e}^x$

$\boxed{f'(x)=(2x^2+9x-2)\mathrm{e}^x}$

Conjecture :

Si $f(x)=P(x)\mathrm{e}^x$ avec $P(x)$ polynôme alors f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$et $f'(x)=P_1(x)\mathrm{e}^x$ avec $P_1(c)$ polynôme de même degré que P.

3. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

f est **dérivable** sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables de dénominateur non nul.

$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x)=\mathrm{e}^x$ $\quad$ $u'(x)=\mathrm{e}^x$

$v(x)=x$ $\quad$ $v'(x)=1$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x\times x-1\times\mathrm{e}^x}{x^2}=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}}$$

4. $f(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$

On peut écrire $f(x)=x^2e^{-x}$

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)v(x)$ avec :

$u(x)=x^2$ $\quad\quad$ $u'(x)=2x$

$v(x)=\mathrm{e}^{-x}$ $\quad\quad$ $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

Pour tout nombre réel x,

$f'(x)=2xe^{-x}+x^2(-\mathrm{e}^{-x})$

$\boxed{f'(x)=(-x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}}$

5. $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{5x-4}$ définie sur $\mathbb{R}$

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)v(x)$ avec :

$u(x)=2x-1$ $\quad\quad$ $u'(x)=2$

$v(x)=\mathrm{e}^{5x-4}$ $\quad\quad$ $v'(x)=5\mathrm{e}^{5x-4}$

$f'(x)=2\mathrm{e}^{5x-4}+(2x-1)(5\mathrm{e}^{5x-4})$

$f'(x)=2\mathrm{e}^{5x-4}+(10x-5)\mathrm{e}^{5x-4}$

$\boxed{f'(x)=(10x-3)\mathrm{e}^{5x-4}}$

6. $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

On pose $h(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x)=\frac{1}{x}$.

u est **dérivable** sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Donc h est **dérivable** sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et $h'(x)=u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

f est **le produit de deux fonctions dérivables** sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

$f(x)=g(x)h(x)$ avec

$g(x)=x^2$ $\quad\quad$ $g'(x)=2x$

$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ $\quad\quad$ $h'(x)=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Pour tout nombre réel non nul x :

$f'(x)=2xe^{\frac{1}{x}}+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$

$f'(x)=2xe^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

$\boxed{f'(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$