Exercice

Études et représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ des fonctions suivantes :

1. f définie sur ℝ par $f(x)=x+e^x$
2. g définie sur ℝ par $g(x)=e^x-x$
3. h définie sur ℝ par $h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
4. k définie sur ℝ par $k(x)=(2x-4)e^{-x}$
5. l définie sur ℝ par $l(x)=e^{-x^2}$

Correction

1. $f(x)=x+\mathrm{e}^x$

f est **définie**, **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$

Pour tout x réel :

$f'(x)=1+\mathrm{e}^x>0$

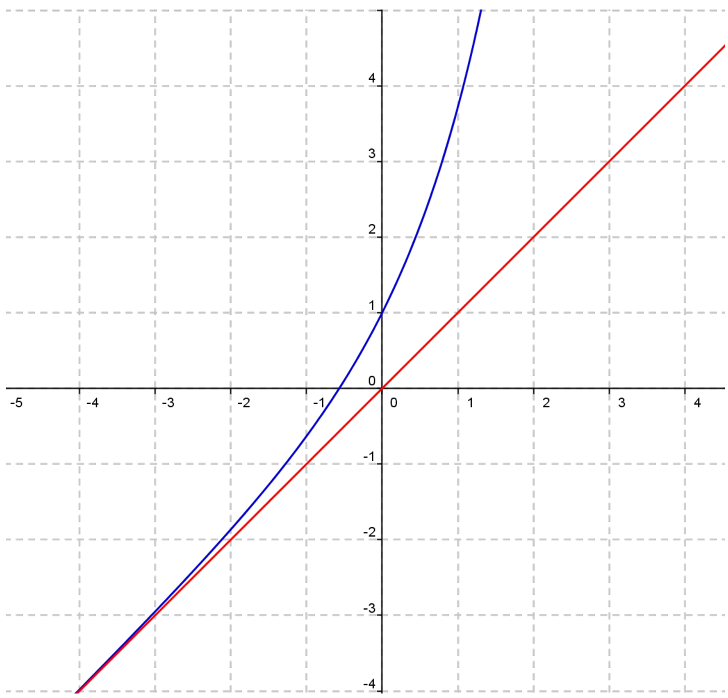
f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de f ' (x)	$+$	
Variations de f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

On a $f(x)-x=\mathrm{e}^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc la droite $\boxed{y=x}$ est **une asymptote oblique** à la courbe représentative de f en $-\infty$.



2. g définie sur ℝ par $g(x)=\mathrm{e}^{x}-x$

g est **définie**, **continue** et **dérivable** sur ℝ

$g'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$

$\mathrm{e}^{x}-1=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow x=0$

$\mathrm{e}^{x}-1>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}>1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}>\mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow x>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$

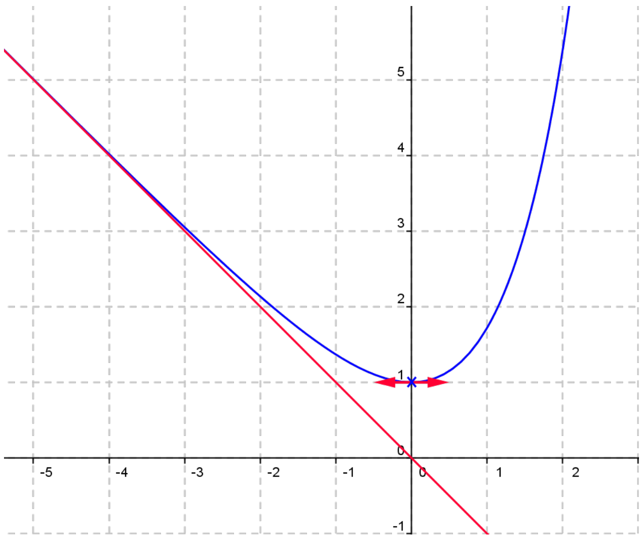
On ne peut pas conclure pour la somme, on transforme alors l'expression :

Si $x>0$, $g(x)=x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}-1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de g ' (x)		$-$	0	$+$	
Variations de g(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On a $g(x)+x=\mathrm{e}^{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ donc la droite $\boxed{y=-x}$ est **une asymptote oblique** à la courbe représentative de g en -$\frac{n}{k}$.



3. h définie sur ℝpar $h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

h est **définie**, **continue** et **dérivable** sur ℝ

$u(x)=e^x-e^{-x}$ $\qquad u'(x)=e^x+e^{-x}$

$v(x)=e^x+e^{-x}$ $\qquad v'(x)=e^x-e^{-x}$

$$h'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$h'(x)=\frac{e^{2x}+2e^x.e^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^x.e^{-x}+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$h'(x)=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}>0$$

h est **strictement croissante** sur ℝ

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

On ne peut pas conclure pour la limite du quotient, on transforme donc l'expression :

$$h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{e^x\times e^x-1}{e^x\times e^x+1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

On ne peut pas conclure pour la limite du quotient, on transforme donc l'expression :

$e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$

$$h(x)=\frac{\frac{1}{e^{-x}}-e^{-x}}{\frac{1}{e^{-x}}+e^{-x}}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

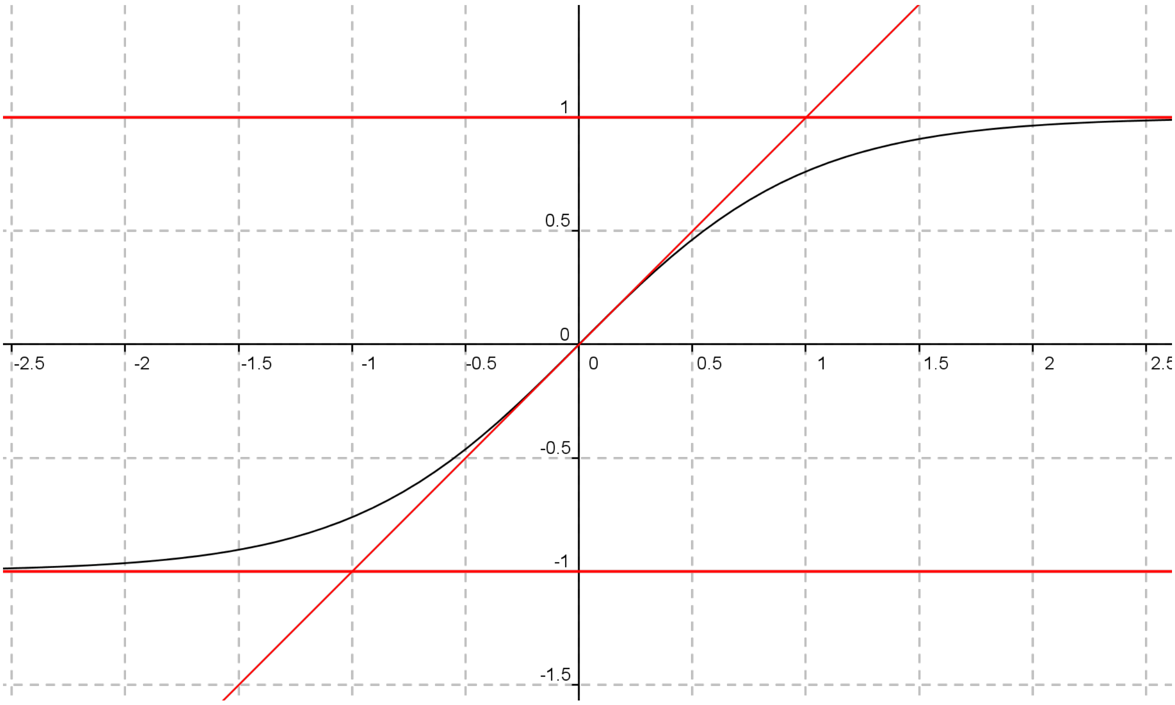
$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\frac{1-0}{1+0}=1}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$
Variations de h(x)	$-1 \nearrow 1$

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=-1$ donc la droite d'équation $\boxed{y=-1}$ est **une asymptote horizontale** à la courbe représentative de h en $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=1$ donc la droite d'équation $\boxed{y=1}$ est **une asymptote horizontale** à la courbe représentative de h en $+\infty$.



4. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=(2x-4)e^{-x}$

k est **définie**, **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$

$u(x)=2x-4$ $\qquad$ $u'(x)=2$

$v(x)=e^{-x}$ $\qquad$ $v'(x)=-e^{-x}$

$k'(x)=2e^{-x}+(2x-4)(-e^{-x})$

$k'(x)=(-2x+6)e^{-x}$

Pour tout nombre réel x , $e^{-x}>0$ donc le signe de $k'(x)$ est le signe de $-2x+6$.

$-2x+6=0 \iff x=3$

$-2x+6>0 \iff x<3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2\mathrm{x} - 4 = -\infty$

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2\mathrm{x} - 4 = +\infty$

On ne peut pas conclure en utilisant la limite d'un produit, donc on transforme l'expression.

$k(x) = 2xe^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x}$

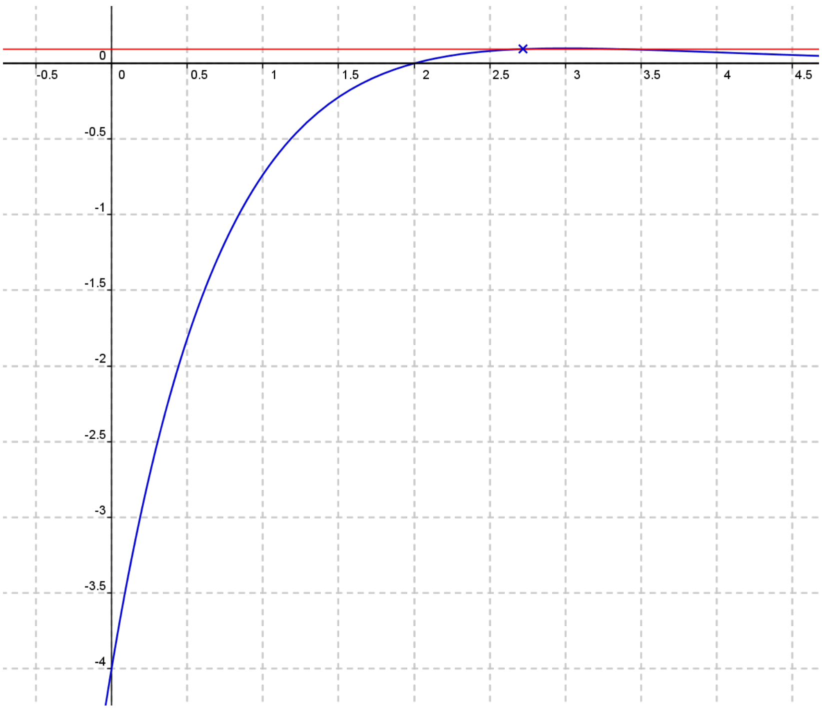
$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -4\mathrm{e}^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\mathrm{x}\mathrm{e}^{-x} = 0$

Et, donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 0}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de k ' (x)		$+$	0	$-$	
Variations de k(x)	$-\infty$	↗	$2e^{-3}$	↘	0

$\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 0$ donc la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote horizontale** à la courbe représentative de k en $+\infty$.



5. l définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x)=e^{-x^2}$

l est **définie**, **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$

$l(x)=e^{u(x)}$ Avec :

$u(x)=-x^2$ $\quad\quad\quad$ $u'(x)=-2x$

Pour tout x réel :

$l'(x)=-2xe^{-x^2}$

$e^{-x^2}>0$ donc le signe de $l'(x)$ est le signe de $-2x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} l(x)=0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} l(x)=0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de l ' (x)		$+$	0	$-$	
Variations de l(x)	0	↗	1	↘	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} l(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} l(x)=0$ donc la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote horizontale** à la courbe représentative de l en $+\infty$ et en $-\infty$.