Fonctions sinus et cosinus.

1. Rappels de trigonométrie................................ **P2**

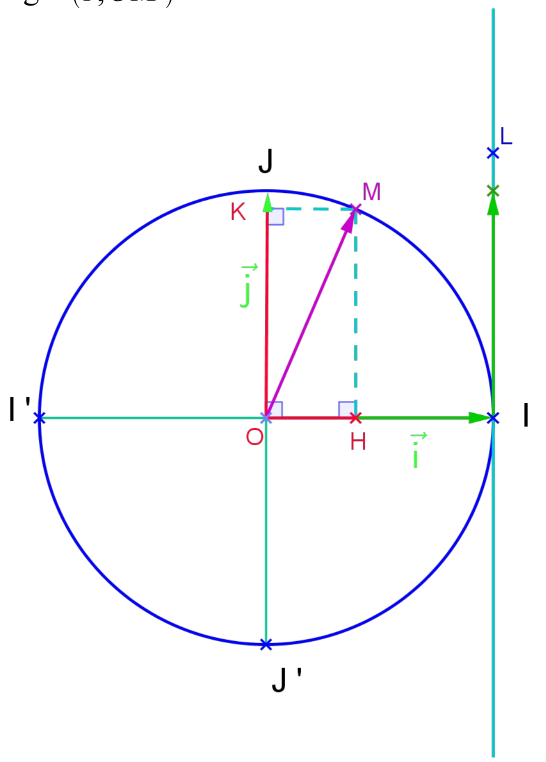
2. Variations et représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus.................................... **p8**

3. Compléments.. **p10**

1. Rappels de trigonométrie

1.1. Définitions

$\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique. $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ Et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.
$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.
x est un nombre réel quelconque.
On considère le point L tel que $\overrightarrow{IL}=x\vec{j}$ (L appartient à la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{j}$, cette droite est tangente en I au cercle $\mathscr{C}$).
M est le point de C qui vient en coïncidence avec L lorsque l'on enroule la droite précédente sur le cercle $\mathscr{C}$, donc x est une mesure en radians de l'angle $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$



Le **cosinus** du nombre réel x que l'on note $\cos x$ est **l'abscisse** du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (ou l'abscisse du point H dans le repère $(O;\vec{i})$ de la droite (OI).
Le **sinus** du nombre réel x que l'on note $\cos x$ est **l'ordonnée** du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (ou l'abscisse du point H dans le repère $(O;\vec{j})$ de la droite (OJ).

On a donc :

$M(\cos x;\sin x)$ $\qquad$ $\overrightarrow{OM}=(\cos x)\vec{i}+(\sin x)\vec{j}$
$H(\cos x;0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{OH}=(\cos x)\vec{i}$
$K(0;\sin x)$ $\qquad$ $\overrightarrow{OK}=(\sin x)\vec{j}$

1.2. Valeurs remarquables

mesure en radians x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

1.3. Propriétés

Pour tout nombre réel x, on a :

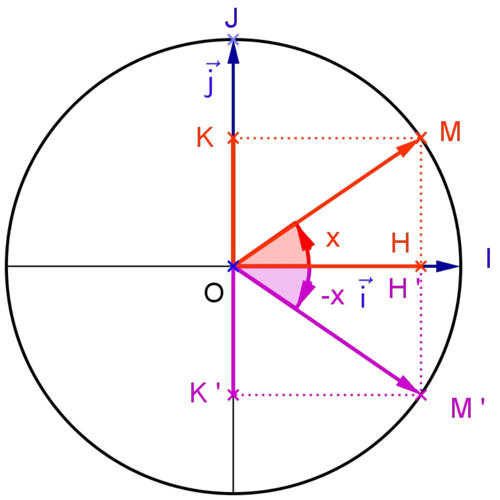
$\boxed{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$ $\boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$

$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ $\boxed{\cos(x+2\pi) = \cos x}$ $\boxed{\sin(x+2\pi) = \sin x}$

1.4. Angles associés

a) *Angles opposés*

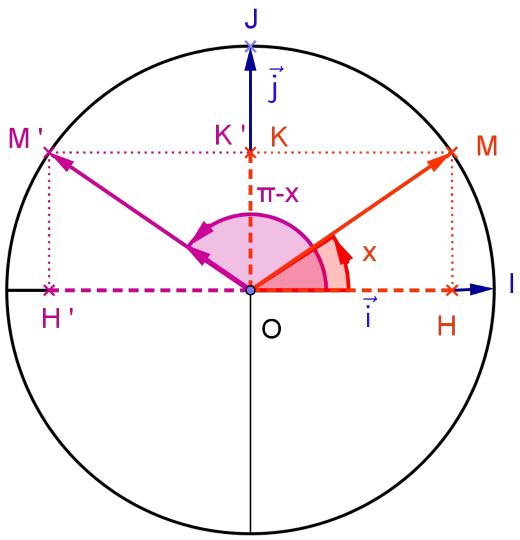
$(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ et $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM'}) = -x + 2k\pi$.



Les points M et M' sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses**.
$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$ et $\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$

b) *Angles supplémentaires*

Les angles $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ et $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM'})$ sont **supplémentaires** si et seulement si leur somme est égale à l'angle plat.
Si $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ alors $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM'}) = \pi - x + 2k\pi$.

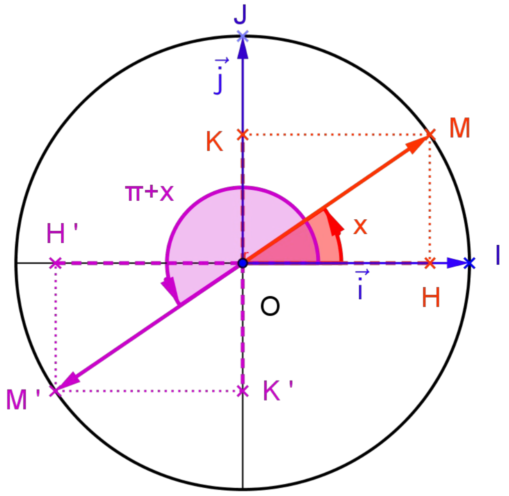


Les points M et M' sont **symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**.

$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos x}$ et $\boxed{\sin(\pi - x) = -\sin x}$

c) *Angles dont la différence est l'angle plat*

Si $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ alors $(\vec{i}; \overrightarrow{OM'}) = \pi + x + 2k\pi$.



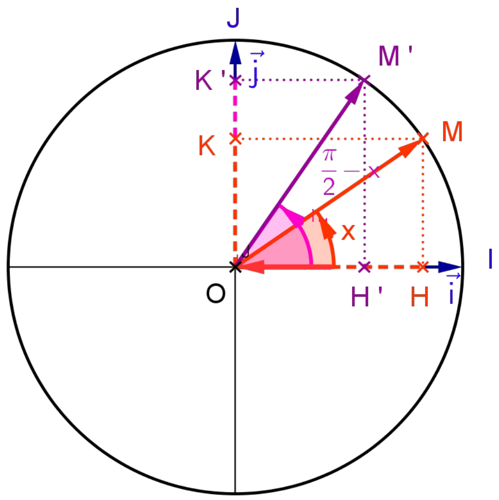
Les points M et M' sont **symétriques par rapport à O**.

$\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos x}$ et $\boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x}$

d) *Angles complémentaires*

Les angles $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ et $(\vec{i}; \overrightarrow{OM'})$ sont **complémentaires** si et seulement si leur somme est égale à l'angle droit positif.

Si $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ alors $(\vec{i}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$.

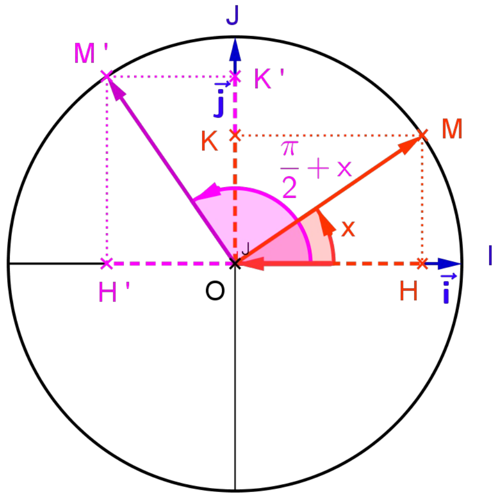


Les angles $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OM'}; \vec{j})$ sont égaux et OK'=OH et OH'=OK.

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x}$ et $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}$

e) *Angles dont la différence est l'angle droit positif*

Si $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})=x+2k\pi$ alors $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+x+2k\pi$.



Les angles $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ et $(\vec{j}\,;\overrightarrow{OM'})$ sont égaux et OK'=OH et OH'=OK.

$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x}$ et $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x}$

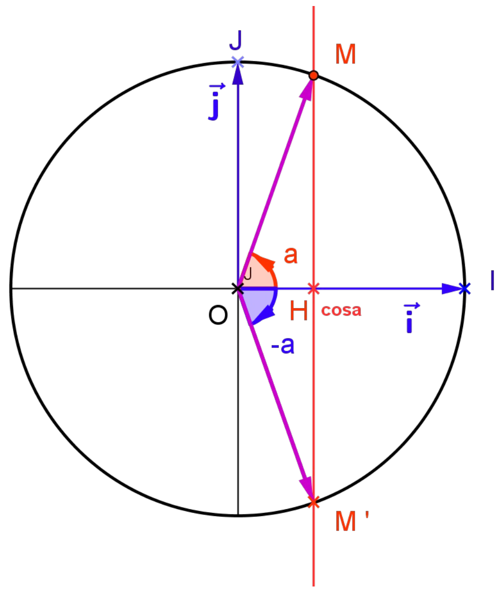
1.5. Équations : cos*x*=cosa et sin*x*=sina

a) *Remarque*

Pour tout nombre réel x , on a : $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ et $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x=k$ et $\sin x=k$ avec k strictement supérieur à 1 ou strictement inférieur à -1 est l'ensemble vide.

b) *cos x=cos a*

Nous avons vu que le fonction cosinus est continue (et dérivable) sur $\mathbb{R}$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que si $k\in[-1\,;1]$ alors il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que cos a=k.
On obtient une valeur exacte de a lorsque k est une valeur remarquable (ou son opposé) pour cosinus.
On considère alors un cercle trigonométrique rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ $\vec{i}=\overrightarrow{OJ}$



On place le point $H(\cos a;0)$, puis on trace la perpendiculaire à (OI) en H. Cette droite coupe le cercle en deux points distincts (lorsque $\cos a \neq 1$ et $\cos a \neq -1$) que l'on note M et M'.
Sur le dessin, on suppose que a est une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$. Dans ce cas, $-a$ est une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM'})$.
Si a était une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM'})$ alors $-a$ serait une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$.

<u>Conclusion :</u>

$$\cos x=\cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+2k\pi \\ \quad ou \\ x=-a+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Exemple :

Résoudre dans ℝ l'équation $\cos x=\frac{1}{2}$.

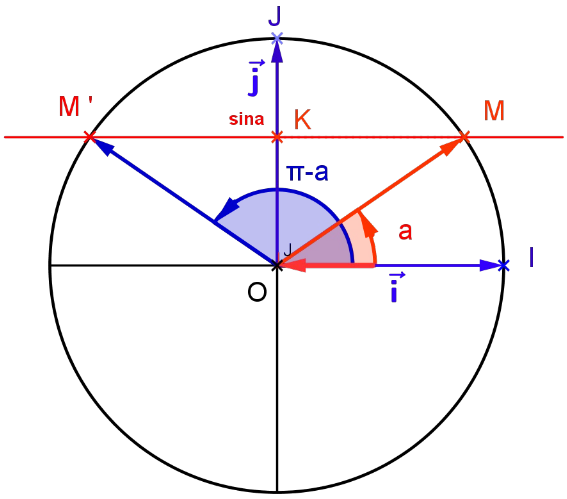
On sait que $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

$$\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \quad ou \\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Cas particuliers :
$\cos x=1=\cos 0 \Leftrightarrow x=0+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$
$\cos x=-1=\cos\pi \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

c) <u>*sin x=cos a*</u>

On considère alors un cercle trigonométrique rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ $\vec{i}=\overrightarrow{OJ}$



On place le point $K(0;\sin a)$, puis on trace la perpendiculaire à (OJ) en K. Cette droite coupe le cercle en deux points distincts (lorsque $\sin a \neq 1$ et $\sin a \neq -1$) que l'on note M et M'.
Sur le dessin, on suppose que a est une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$. Dans ce cas, $\pi-a$ est une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM'})$.
Si a était une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM'})$ alors $\pi-a$ serait une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$.

Conclusion :

$$\sin x=\sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+2k\pi \\ \quad ou \\ x=\pi-a+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Exemple :

Résoudre dans ℝ l'équation $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \quad ou \\ x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \quad ou \\ x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Cas particuliers :

$\sin x=1=\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\sin x=-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

1.6. Signe de cosinus et sinus sur [0;2π]

x	0		π		2π
sinx	0	$+$	0	$-$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cosx		$+$	0	$-$	0		

1.7. Formules d'addition

a et b sont deux nombres réels.

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

1.8. Formules de duplication

a un nombre réel.

$\boxed{\sin 2a = 2\sin a \cos a}$

$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a}$

2. Variations et représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus

2.1. Fonctions périodiques

a) *Définition*

T est un réel strictement positif fixé.
f est une fonction définie sur D.
On dit que f est **une fonction périodique** de période **T** si et seulement si pour tout $x \in D$, on a $(x-T) \in D$ et $(x+T) \in D$ et $\boxed{f(x+T) = f(x)}$.

b) On peut vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et tout $x \in D$: $\boxed{f(x+nT) = f(x)}$

c) La représentation graphique d'une fonction périodique d'une fonction périodique de période T est globalement invariante par les translations de vecteurs directeurs $\vec{V}_n = nT.\vec{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$.

Concrètement, si on obtient la courbe sur [O;T], on translate le « motif » sur [T;2T] puis sur [2T;3T]... et sur [-T;0] puis [-2T;-T] ; ….

2.2. Propriétés des fonctions sinus et cosinus

a) sin : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin x$

sin est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $\sin(x+2\pi) = \sin x$ donc sin est **périodique de période 2π**.
Pour tout x réel, $\sin(-x) = -\sin x$ donc sin est **une fonction impaire**.
Pour tout x réel, $\sin'(x) = \cos x$

b) cos : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \cos x$

cos est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ donc cos est **périodique de période 2π**.
Pour tout x réel, $\cos(-x) = \cos x$ donc sin est **une fonction paire**.
Pour tout x réel, $\cos'(x) = -\sin x$

2.3. Tableaux de variations de sin et cos sur [0;2π]

a)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Signe de sin '(x)=cosx		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de sinx	0	↗	1	↘	-1	↗	0

On a aussi $\sin\pi=0$.

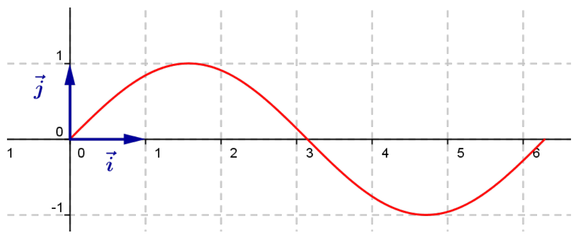
b)

x	0		π		2π
Signe de cos '(x)=-sinx	0	$-$	0	$+$	0
Variations de cosx	1	↘	-1	↗	1

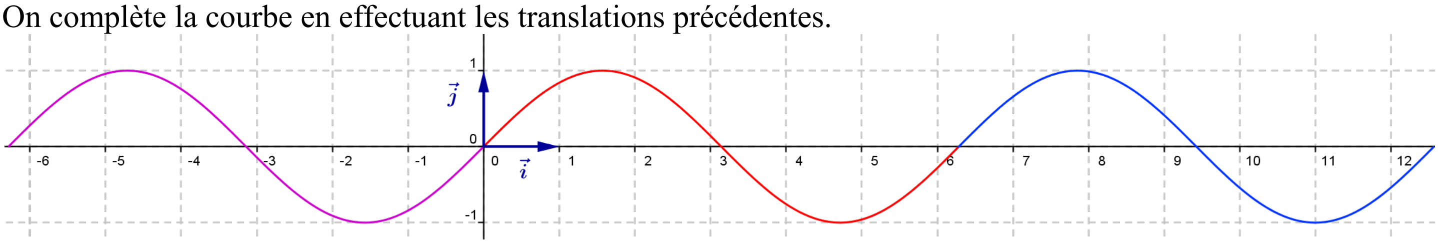
On a aussi $\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{3\pi}{2}=0$.

2.4. Représentations graphiques

a) Sinus sur $[0;2\pi]$

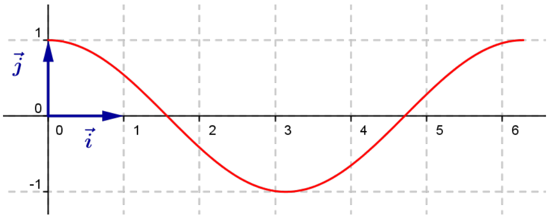


Sinus sur ℝ
On complète la courbe en effectuant les translations précédentes.

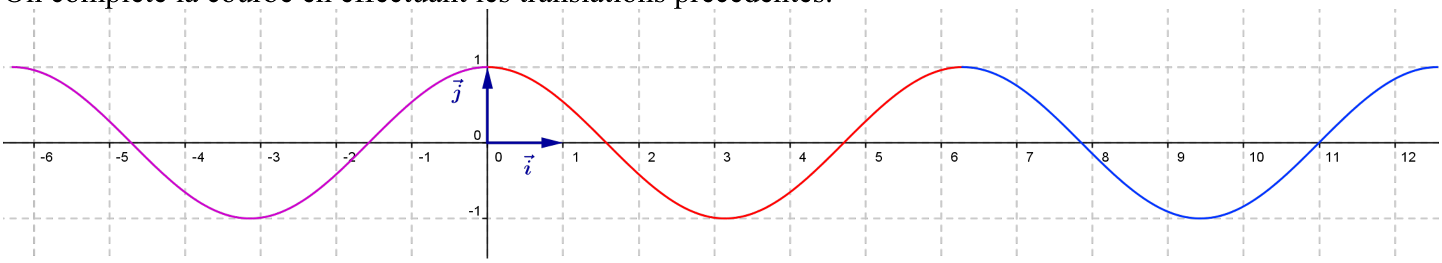


<u>Remarques :</u>
La courbe représentative de sin sur ℝ se nomme **sinusoïde**.
sin est une fonction impaire donc l'origine est **un centre de symétrie de la courbe**.
On peut vérifier que la droite d'équation $y=x$ est **tangente à la courbe à l'origine**.

b) Cosinus sur $[0;2\pi]$



Cosinus sur ℝ
On complète la courbe en effectuant les translations précédentes.



<u>Remarques :</u>
Pour tout nombre réel x, on a $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et la courbe représentative de cos est aussi une **sinusoïde**.
cos est une fonction paire donc **l'axe des ordonnées** est **un axe de symétrie de la courbe**.

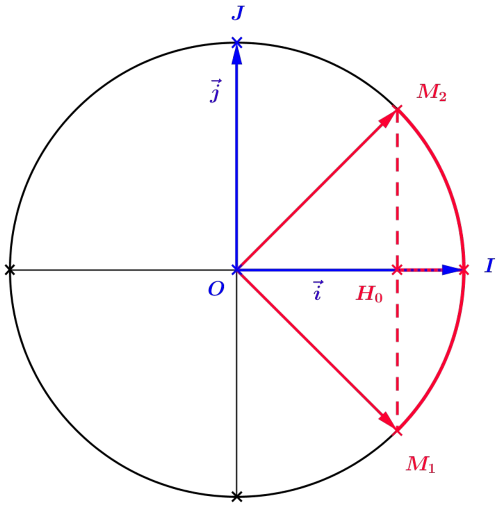
3. Compléments

3.1. Inéquations trigonométriques

a) Résoudre dans ℝ : $\cos x \geqslant -2$
Pour tout nombre réel x, on a : $-1\leqslant \cos x\leqslant 1$ donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

b) Résoudre dans ℝ : $\sin x\leqslant -\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}<-1$ donc $\mathcal{S}=\varnothing$.

c) Résoudre dans ℝ : $\cos x\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$
On considère un cercle trigonométrique rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ $\vec{i}=\overrightarrow{OJ}$



On place sur l'axe des abscisses le point H_0 tel que $\overrightarrow{OH_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}$.

On note M_1 et M_2 les points d'intersection de la perpendiculaire à l'axe des abscisses et du cercle trigonométrique.

$(\vec{i};\overrightarrow{OM_1})=x_1+2k\pi$

$(\vec{i};\overrightarrow{OM_2})=x_2+2k\pi$

$\cos x_1=\cos x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit M un point du cercle trigonométrique et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

$(\vec{i};\overrightarrow{OM_1})=x+2k\pi$

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff H\in[H_0I] \iff M\in \overset{\frown}{M_1IM_2}$$

On détermine une mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM_1})$, puis la mesure de $(\vec{i};\overrightarrow{OM_2})$ dans le sens direct et dans le même tour de cercle.

Si on choisit $x_1=-\frac{\pi}{4}$ alors il faut choisir $x_2=\frac{\pi}{4}$.

(Si on choisissait $x_1=\frac{7\pi}{4}$ alors $x_2=\frac{9\pi}{4}$)

$\cos x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{-\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\mathcal{S}=\left[-\frac{\pi}{4}+2\mathrm{k}\pi;\frac{\pi}{4}+2\mathrm{k}\pi\right]=\ldots\cup\left[-\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right]\cup\ldots,\ k\in\mathbb{Z}$

<u>Remarque :</u>

Si on demande l'ensemble des solutions de l'inéquation appartenant à $[0;2\pi]$ alors on doit déterminer :

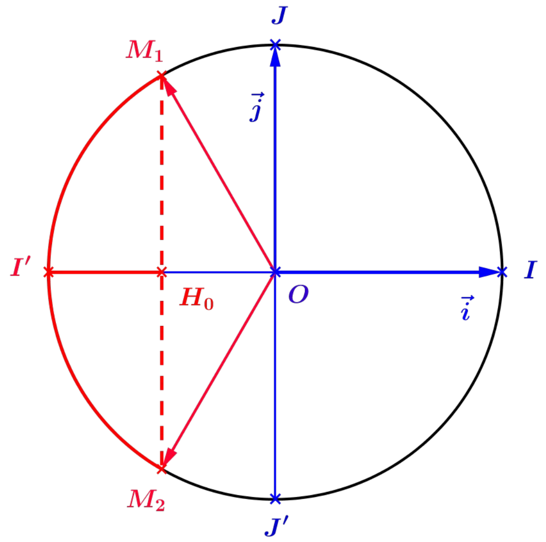
$\mathcal{S}\cap\ [0;2\pi]$.

On obtient : $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

d) Résoudre dans ℝ : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant -\frac{1}{2}$

On pose $X=2x+\frac{\pi}{6}$ et on considère l'inéquation $\cos X\leqslant -\frac{1}{2}$.

On considère un cercle trigonométrique rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ $\vec{i}=\overrightarrow{OJ}$



On place sur l'axe des abscisses le point H_0 tel que $\overrightarrow{OH_0}=-\frac{1}{2}\vec{i}$.

On note M_1 et M_2 les points d'intersection de la perpendiculaire à l'axe des abscisses et du cercle trigonométrique.

$(\vec{i};\overrightarrow{OM_1})=X_1+2k\pi$

$(\vec{i};\overrightarrow{OM_2})=X_2+2k\pi$

$\cos X_1=\cos X_2=-\frac{1}{2}$

Soit M un point du cercle trigonométrique et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

$(\vec{i};\overrightarrow{OM})=X+2k\pi$

$$\cos X\leq -\frac{1}{2}\iff H\in[I'H_0]\iff M\in \overset{\frown}{M_1I'M_2}$$

$X_1=\frac{2\pi}{3}$ et $X_2=\frac{4\pi}{3}$.

$\cos X\leq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant X\leqslant \frac{4\pi}{3}+2k\pi$

Or, $X=2x+\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant \frac{4\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant \frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant \frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant \frac{7\pi}{12}+k\pi$

$\mathcal{S}=\left[\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{7\pi}{12}+k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$

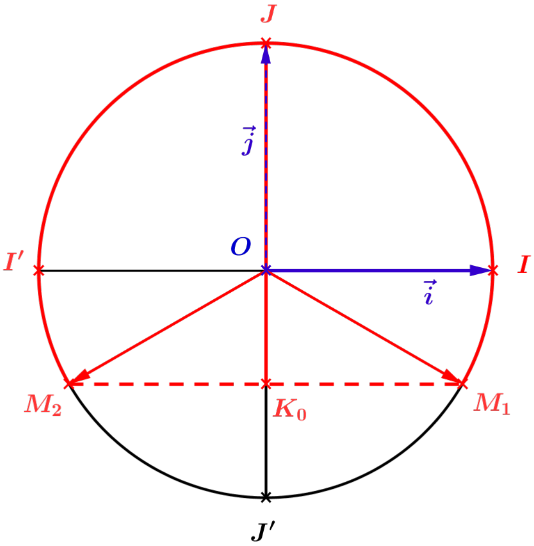
<u>Remarque :</u>
Si on demande l'ensemble des solutions de l'inéquation appartenant à $[0;2\pi]$ alors on doit déterminer : $\mathcal{S}\cap\ [0;2\pi]$.

On obtient : $\left[\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\frac{19\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

e) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant-\frac{1}{2}$

On pose $X=3x+\frac{\pi}{3}$ et on considère l'inéquation $\sin X\geqslant-\frac{1}{2}$.

On considère un cercle trigonométrique rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ $\vec{i}=\overrightarrow{OJ}$



On place sur l'axe des abscisses le point K_0 tel que $\overrightarrow{OK}_0=-\frac{1}{2}\vec{j}$.

On note M_1 et M_2 les points d'intersection de la perpendiculaire à l'axe des ordonnées et du cercle trigonométrique.

$(\vec{i};\overrightarrow{OM}_1)=X_1+2k\pi$

$(\vec{i};\overrightarrow{OM}_2)=X_2+2k\pi$

$\sin X_1=\sin X_2=-\frac{1}{2}$

Soit M un point du cercle trigonométrique et K son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

$(\vec{i};\overrightarrow{OM})=X+2k\pi$

$$\sin X\geq-\frac{1}{2}\iff K\in[JK_0]\iff M\in\overset{\frown}{M_1JM_2}$$

$X_1=-\frac{\pi}{6}$ et $X_2=\frac{7\pi}{6}$.

$\sin X\geqslant-\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant X\leqslant\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

Or, $X=3x+\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant3x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant3x\leqslant\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant 3x \leqslant \frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$

$\mathcal{S}=\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3};\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$

Remarque :
Si on demande l'ensemble des solutions de l'inéquation appartenant à $[0;2\pi]$ alors on doit déterminer :
$\mathcal{S}\cap [0;2\pi]$.
On obtient : $\left[0;\frac{5\pi}{18}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{17\pi}{18}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6};\frac{29\pi}{18}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$

3.2. Étude de fonctions trigonométriques

a) *Remarque :*

On se propose de donner des exemples d'études de fonctions du type : $f(x)=a\cos(\omega x+\phi)$ ou $g(x)=a\sin(\omega x+\phi)$ avec a et ω deux nombres réels strictement positifs donnés et ϕ nombre réel.
Pour tout x réel :
$f(x+\frac{2\pi}{\omega})=a\cos(\omega(x+\frac{2\pi}{\omega})+\phi)=a\cos(\omega x+2ù\pi+\phi)+a\cos(\omega x+\phi)=f(x)$
De même, $g(x+\frac{2\pi}{\omega})=g(x)$

Donc, f et g sont deux fonctions périodiques de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

b) *Exemple 1 :*

$f(x)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

f est périodique de période $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.
On étudie f sur un intervalle de période d'amplitude π. On choisit $[0;\pi]$. Puis on obtiendra la courbe représentative sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x)=-6\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$
On pose $X=2x+\frac{\pi}{6}$.
$\sin X\geqslant 0 \Leftrightarrow 0+2k\pi\leqslant X\leqslant \pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
$f'(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow 0+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant \pi+2k\pi$
$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$
$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant \frac{5\pi}{12}+k\pi$

$\mathcal{S}=\left[0;\frac{5\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{12};\pi\right]$

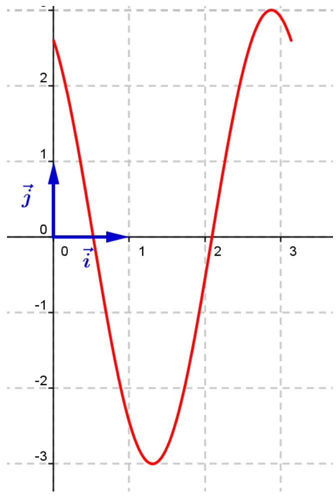
Tableau de variations sur $[O;\pi]$:

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
Signe de f ' (x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f(x)	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	-3	↗	3	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

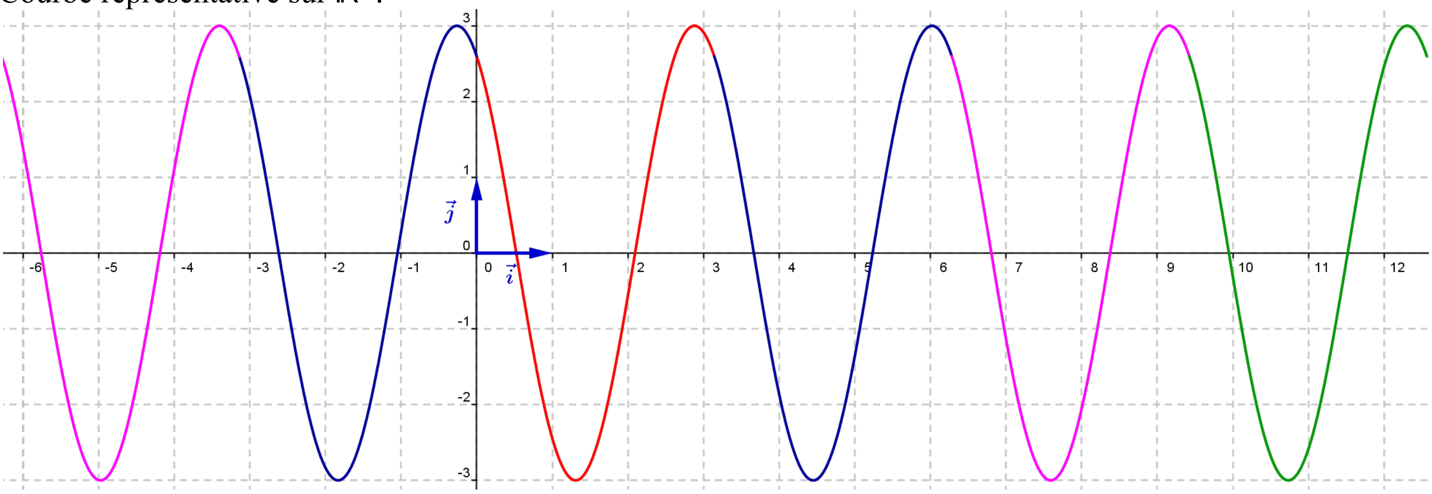
$f(0)=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=f(\pi)$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-3$ et $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=3$.

Courbe représentative sur $I=[0;\pi]$.



Courbe représentative sur $\mathbb{R}$:



c) *Exemple 2 :*

$g(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

g est périodique de période $T=\frac{2\pi}{3}$.

On étudie g sur un intervalle de période d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$. On choisit $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$. Puis on obtiendra la courbe représentative sur ℝ.

g est dérivable sur ℝ.
$g'(x)=6\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

On pose $X=3x-\frac{\pi}{6}$.

$\cos X\geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant X\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 3x\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$

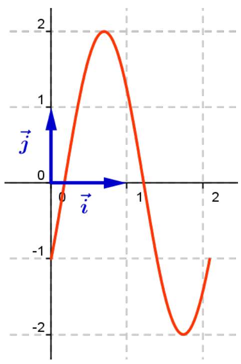
$\mathscr{S}=\left[0;\frac{25\pi}{9}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{9};\frac{2\pi}{3}\right]$

Tableau de variations sur $[0;\frac{2\pi}{3}]$:

x	0		$\frac{2\pi}{9}$		$\frac{5\pi}{9}$		$\frac{2\pi}{3}$
Signe de g ' (x)		+	0	−	0	+	
Variations de g(x)	-1	↗	2	↘	-2	↗	-1

$g(0)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ $\quad g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1$ $\quad g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$ $\quad g\left(\frac{5\pi}{9}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$

Courbe représentative sur $[0;\frac{2\pi}{3}]$.



Courbe représentative sur $\mathbb{R}$: