Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes puis donner les solutions appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$

1. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)=\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)$

3. $2\cos^2 x-1=0$

4. $2\cos^2 x-(2+\sqrt{3})\cos x+\sqrt{3}=0$

Correction :

1. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Or, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ ou \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ ou \\ 2x=\pi+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{2} \\ ou \\ x=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{2} \end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

Donc dans I, $\boxed{S=\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\}}$

2. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)=\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{6}-2\text{x}=4\text{x}-\frac{\pi}{5}+2k\pi \\ ou \\ \frac{5\pi}{6}-2\text{x}=-(4\text{x}-\frac{\pi}{5})+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\text{x}=\frac{-5\pi}{6}-\frac{\pi}{5}+2k\pi \\ ou \\ 2\text{x}=\frac{-5\pi}{6}+\frac{\pi}{5}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\text{x}=\frac{-31\pi}{30}+2k\pi \\ ou \\ 2\text{x}=\frac{-19\pi}{30}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{31\pi}{180}-\frac{k\pi}{3} \\ ou \\ x=\frac{-19\pi}{60}+k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$$

Donc dans I, $\boxed{S=\{\frac{31\pi}{180};\frac{91\pi}{180};\frac{151\pi}{180};\frac{211\pi}{180};\frac{271\pi}{180};\frac{331\pi}{180};\frac{41\pi}{60};\frac{101\pi}{60}\}}$

3. $2\cos^2 x-1=0 \ast (\sqrt{2}\cos x-1)(\sqrt{2}\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ou} \\ \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \cos x = \cos\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$$

Donc dans I, $\boxed{S=\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\}}$

4. $2\cos^2 x-(2+\sqrt{3})\cos x+\sqrt{3}=0$

On pose $X=\cos x$

$2X^2-(2+\sqrt{3})X+\sqrt{3}=0$

$\Delta=(2+\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}$

$\Delta=4+4\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}$

$\Delta=4-4\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$\Delta=(2-\sqrt{3})^2$

$2-\sqrt{3}\geqslant 0$ donc $\sqrt{\Delta}=2-\sqrt{3}$

$X_1=\dfrac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{4}=1$

$X_2=\dfrac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x=1=\cos 0 \Leftrightarrow x=0+2k\pi$

$\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$

Donc, dans I, $\boxed{S=\{0;\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\}}$