

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes puis donner les solutions appartenant à l'intervalle $I = [0; 2\pi]$

1. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

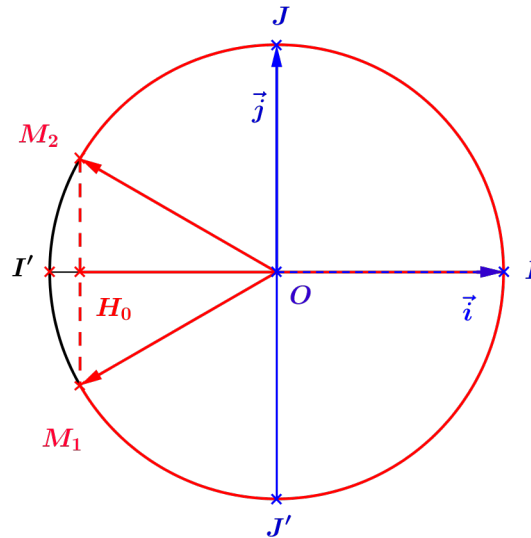
2. $\sin\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$

Correction

$$1. \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On pose $X = 2x - \frac{\pi}{3}$, et on considère l'inéquation $\cos X \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On considère un cercle trigonométrique rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



On place sur l'axe des abscisses le point H_0 tel que $\overrightarrow{OH_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i}$.

On note M_1 et M_2 les points d'intersection de la perpendiculaire à l'axe des abscisses et du cercle trigonométrique.

$$(\vec{i}; \overrightarrow{OM_1}) = X_1 + 2k\pi$$

$$(\vec{i}; \overrightarrow{OM_2}) = X_2 + 2k\pi$$

$$\cos X_1 = \cos X_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soit M un point du cercle trigonométrique et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

$$(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = X + 2k\pi$$

$$\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff H \in [H_0 I] \iff M \in \overrightarrow{M_1 I M_2}$$

$$X_1 = -\frac{5\pi}{6} \text{ et } X_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\cos X \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq X \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{Or, } X = 2x - \frac{\pi}{3}$$

$$\iff -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\iff -\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

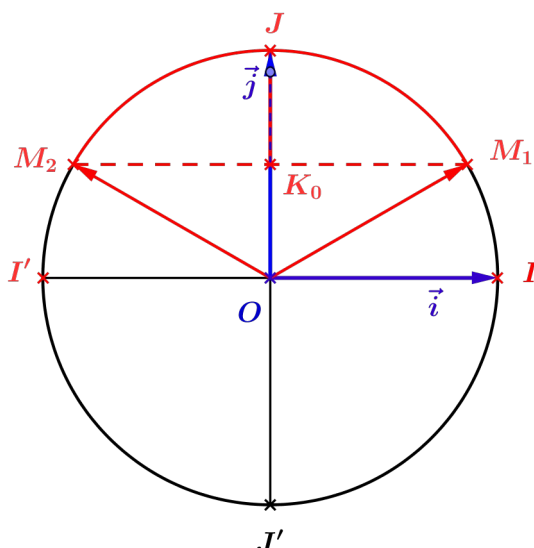
$$\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{S} \cap \mathbb{I} = \left[0; \frac{7\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{19\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi \right]$$

$$2. \sin\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$$

On pose $X = -2x + \frac{\pi}{4}$ et on considère l'inéquation $\sin X \geq \frac{1}{2}$.

On considère un cercle trigonométrique rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



On place sur l'axe des ordonnées le point K_0 tel que $\overrightarrow{OK_0} = \frac{1}{2}\vec{j}$.

On note M_1 et M_2 les points d'intersection de la perpendiculaire à l'axe des ordonnées et du cercle trigonométrique.

$$(\vec{i}; \overrightarrow{OM_1}) = X_1 + 2k\pi$$

$$(\vec{i}; \overrightarrow{OM_2}) = X_2 + 2k\pi$$

$$\cos X_1 = \cos X_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soit M un point du cercle trigonométrique et K son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées.

$$(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = X + 2k\pi$$

$$\sin X \geq \frac{1}{2} \iff K \in [JK_0] \iff M \in \overset{\text{red arrow}}{M_1 J M_2}$$

$$X_1 = \frac{\pi}{6} \text{ et } X_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\sin X \geq \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq X \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{Or, } X = -2x + \frac{\pi}{4}$$

$$\iff \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq -2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\iff \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq -2x \leq \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\iff \frac{-\pi}{12} + 2k\pi \leq -2x \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\iff \frac{\pi}{24} - k\pi \geq x \geq -\frac{7\pi}{24} - k\pi$$

(on peut remplacer k par -k)

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{7\pi}{24} + k\pi; \frac{\pi}{24} + k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{S} \cap I = \left[0; \frac{\pi}{24} \right] \cup \left[\frac{17\pi}{24}; \frac{25\pi}{24} \right] \cup \left[\frac{41\pi}{24}; 2\pi \right]$$