Exercice

Étude et représentation graphique sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$
2. $g(x)=3\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

Correction :

1. $f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

f est périodique de période $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

On étudie f sur un intervalle de période d'amplitude 4π . On choisit $I=[0;4\pi]$. Puis on obtiendra la courbe représentative sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=\frac{1}{2}\times 4\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

On pose $X=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$.

$\cos X\geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant X\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+4k\pi$

Les solutions sur l'intervalle $I=[0;4\pi]$

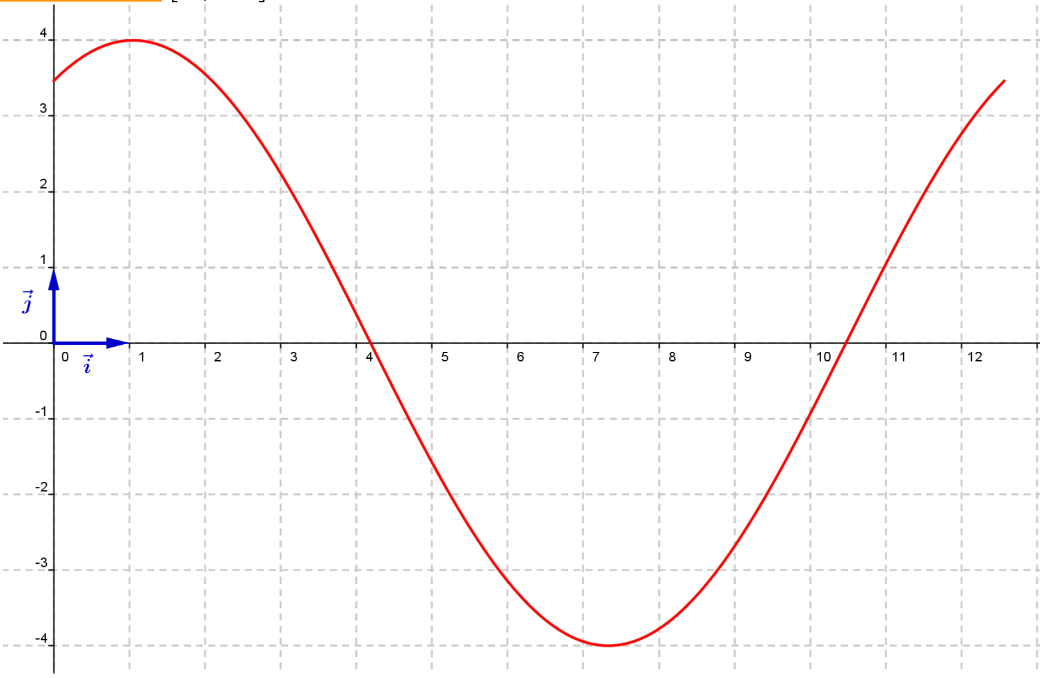
$\mathcal{S}=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{3};4\pi\right]$

Tableau de variations sur $[0;4\pi]$:

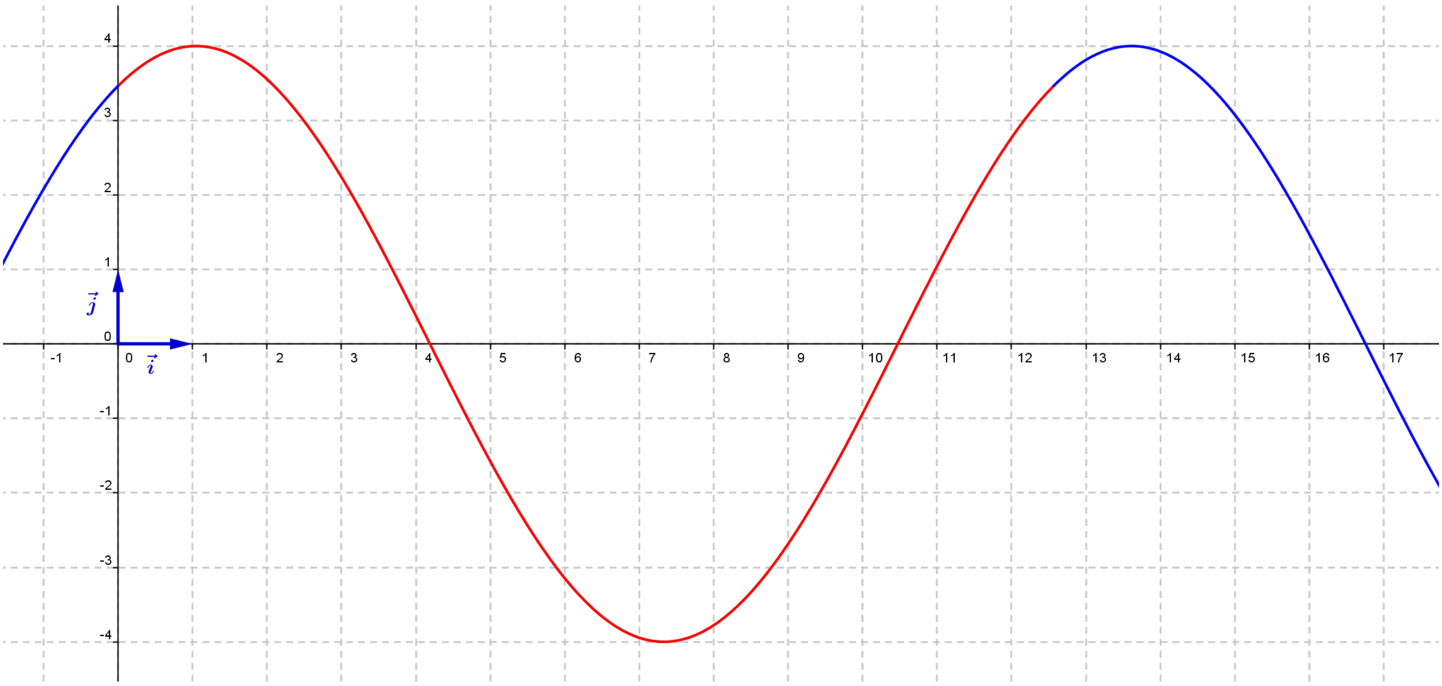
x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{3}$		4π
Signe de f ' (x)		+	0	−	0	+	
Variations de f(x)	$2\sqrt{3}$	↗	4	↘	-4	↗	$2\sqrt{3}$

$f(0)=f(4\pi)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\frac{\pi}{2}=4$ $f\left(\frac{7\pi}{3}\right)=4\sin\frac{3\pi}{2}=-4$

Courbe représentative sur $[0;4\pi]$:



Courbe représentative sur $\mathbb{R}$:



2. $g(x)=3\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

g est **périodique de période** $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

On étudie g sur **un intervalle de période d'amplitude** π . On choisit $[0;\pi]$. Puis on obtiendra la courbe représentative sur $\mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x)=-2\times 3\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

On pose $X=2x+\frac{3\pi}{4}$.

$\sin X \geqslant 0 \Leftrightarrow 0+2k\pi \leqslant X \leqslant \pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$

$f'(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow 0+2k\pi \leqslant 2\mathrm{x}+\dfrac{3\pi}{4}\leqslant \pi+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \leqslant 2\mathrm{x}\leqslant \pi-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \leqslant 2\mathrm{x}\leqslant \dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3\pi}{8}+k\pi \leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{8}+k\pi$

Les solutions sur l'intervalle $[0;\pi]$

$\mathscr{S}=\left[0;\dfrac{\pi}{8}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{8};\pi\right]$

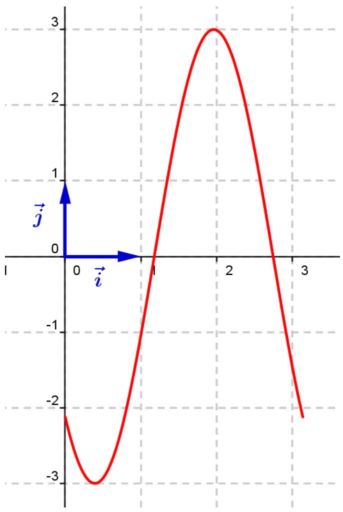
Tableau de variations sur $[O;\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
Signe de g ' (x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g(x)	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$g(0)=3\cos\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}=g(\pi)$

$g\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=3\cos\pi=-3$ et $g\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=3\cos 2\pi=3$.

Courbe représentative sur $I=[0;\pi]$.



Courbe représentative sur $\mathbb{R}$: