Compléments à la fonction ln.

Fonctions exponentielles.

Fonctions puissances.

1. Fonctions composées avec ln

1.1. Remarque

u est une fonction numérique **définie et strictement positive sur l'intervalle I**.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{u} &]0;+\infty[& \xrightarrow{ln} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & \ln(u(x)) \end{array}$$

$$x \xrightarrow[\ln o\, u]{} \ln(u(x))$$

$x \in I$, $g(x)=\ln(u(x))=(\ln o\, u)(x)$

1.2. Théorème

Si u est une fonction numérique **strictement positive** et **dérivable sur l'intervalle I** alors $g=\ln o\, u$ est **dérivable sur I** et :

$\forall x \in I$, $\boxed{g'(x)=(\ln o\, u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

- Démonstration :

$(g\, o\, f)'(x)=g'(f(x)) \times f'(x)$
$(\ln o\, u)'(x)=\ln'(u(x)) \times u'(x)$

Or, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $\ln'(u(x))=\dfrac{1}{u(x)}$

$\boxed{(\ln o\, u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

- Exemple :

$u(x)=3x^2+1$
u est **dérivable** et **strictement positive** sur $\mathbb{R}$
$x \in \mathbb{R}$, $g(x)=\ln(3x^2+1)$

$\boxed{g'(x)=\dfrac{6x}{3x^2+1}}$

- Conséquence :

Le signe de $g'(x)$ est égal au signe de $u'(x)$.
Donc, g et u sont **les mêmes variations sur I**.

1.3. Limites

Dans ce qui suit, on peut remplacer $x \to a$ par $x \to a^+$ ou $x \to a^-$ ou $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

a) Si $\lim_{x\to a} u(x) = +\infty$ alors $\boxed{\lim_{x\to a} \ln(u(x)) = +\infty}$.
b) Si $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ avec $u(x) > 0$ alors $\boxed{\lim_{x\to a} \ln(u(x)) = -\infty}$.
c) Si $\lim_{x\to a} u(x) = b > 0$ alors $\boxed{\lim_{x\to a} \ln(u(x)) = \ln b}$.

1.4. Exercice

$f : x \longmapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$

a) Démontrer que f est définie sur l'ensemble $]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$.
b) Calculer sa dérivée et indiquer son sens de variation.
c) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

a) $x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+3} > 0$
Donc, $\boxed{D_f =]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[}$

b) $u(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$. u est **dérivable** sur $]-\infty;-3[$ et sur $]2;+\infty[$.

$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{5}{(x+3)^2} \times \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{5}{(x+3)(x-2)} > 0$

f est **strictement croissante** sur $]-\infty;-3[$ et sur $]2;+\infty[$.

c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x+3} = 1$ donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0}$.
De même, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 1 = 0}$.
$\lim_{x\to-3^-} \dfrac{x-2}{x+3} = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty}$
$\lim_{x\to2^+} \dfrac{x-2}{x+3} = 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty}$
Les droites d'équations $\boxed{x=-3}$ et $\boxed{x=2}$ sont **des asymptotes verticales à la courbe représentative** de f dans un repère orthogonal.
La droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote horizontale à la courbe** en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Exposants réels

2.1. Racine n^ième^

- $x \in]0;+\infty[$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$
  $\ln x^n = n \ln x = y \Leftrightarrow x^n = e^y = e^{n\ln x}$

- $x \in]0;+\infty[$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$
  L'unique nombre réel y strictement positif tel que $y^n = x$ se nomme **racine n^ième^** de x et se note : $y = \sqrt[n]{x}$.

  $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$

Or, $\ln(\sqrt[n]{x}) = \ln y$

et $\ln y^n = \ln x = n \ln y$, donc : $\ln y = \frac{1}{n} \ln x$

On a donc : $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln x$

Ainsi : $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$.

L'unique nombre réel y strictement positif tel que $y^n = x$ se nomme **racine n^ième^** de x

et se note : $\boxed{y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x}}$

2.2. Exposants rationnels

$x \in]0;+\infty[$ $\quad r \in \mathbb{Q}$ $\quad r = \frac{p}{q}$ $\quad p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

On note :

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\ln x^r = \ln x^{\frac{p}{q}} = \ln\left[\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right] = p \ln x^{\frac{1}{q}} = p \times \frac{1}{q} \ln x = \frac{p}{q} \ln x = r \ln x$$

Donc, $\ln x^r = r \ln x$

$x \in]0;+\infty[$ $\quad r \in \mathbb{Q}$ $\quad \boxed{x^r = e^{r \ln x}}$

2.3. Exposants réels

Définition :

$x \in]0;+\infty[\qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \boxed{x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}}$

On peut vérifier les propriétés des exposants :
$\alpha \in \mathbb{R} \quad \beta \in \mathbb{R} \quad x \in]0;+\infty[\quad y \in]0;+\infty[$

$\boxed{x^{\alpha} \times x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}} \qquad \boxed{\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha-\beta}} \qquad \boxed{(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}} \qquad \boxed{(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha}}$

3. Fonctions exponentielles

3.1. Définition

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

On nomme fonction exponentielle de base a, la fonction $\exp_a$ qui au réel x associe a^x.

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0;+\infty[$$
$$x \longmapsto \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

Pour $a = e$, on obtient la fonction exponentielle.

3.2. Propriétés

- $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $a \neq 1$
  $\boxed{\ln a^x = x \ln a}$
- $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $a \neq 1$
  $\boxed{a^{x+y} = a^x \times a^y}$
  $\boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$
  $\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}$

3.3. Variations

$\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$
$\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\exp_a{}'(x) = (\ln a) e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$

Le signe de $\exp_a'(x)$ est le signe de $\ln a$.

- Si $\boxed{0<a<1}$ alors $\ln a<0$ et $\exp_a'(x)<0$
  $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

- Si $\boxed{a>1}$ alors $\ln a>0$ et $\exp_a'(x)>0$
  $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3.4. Limites

$\exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$

- Si $\boxed{0<a<1}$ alors $\ln a<0$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a}=0}$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a}=+\infty}$

- Si $\boxed{a>1}$ alors $\ln a>0$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a}=+\infty}$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a}=0}$

3.5. Tableaux de variation

0<a<1

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $\exp_a'(x)$		$-$	
variation de $\exp_a$	$+\infty$	$\searrow$	0

1<a

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $\exp_a'(x)$		$+$	
variation de $\exp_a$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3.6. Représentations graphiques

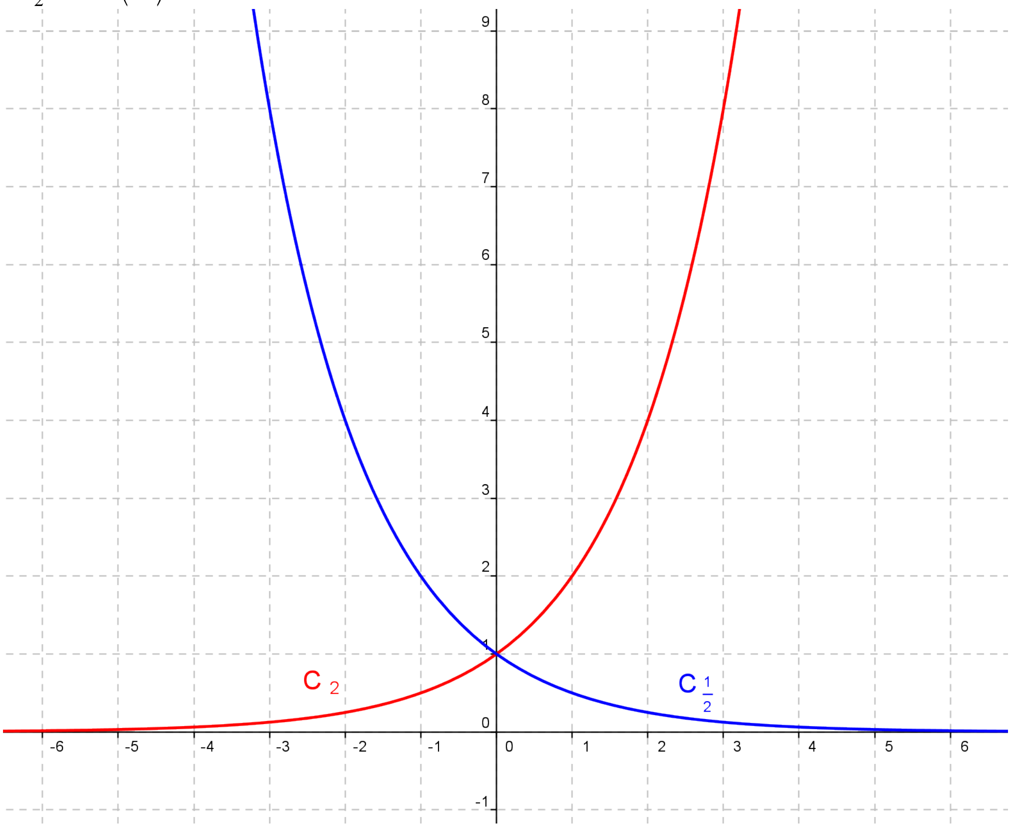
$\exp_a(0)=1$

Si $\boxed{0<a<1}$ alors la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote à la courbe** C_a en $+\infty$.
Si $\boxed{a>1}$ alors la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote à la courbe** C_a en $-\infty$.

Exemples :

$a=2$ $\qquad \exp_2(x)=2^x$

$a=\frac{1}{2}$ $\qquad \exp_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$



Remarque :

$M(x;2^x)\in C_2$ $\qquad M'\left(-x;\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}\right)\in C_{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$

Donc M et M' sont symétriques par rapport à $(y'y)$.

C_2 et $C_{\frac{1}{2}}$ sont **symétriques** par rapport à $(y'y)$.

4. Fonctions puissances

4.1. Définition

$\alpha \in \mathbb{R}$

$f_\alpha :]0;+\infty[\;\to\;]0;+\infty[$

$\qquad x \longmapsto f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Pour $\alpha = 1$, $f_1(x) = x^1 = x$

Pour $\alpha = 0$, $f_0(x) = x^0 = e^{0 \ln x} = 1$

Pour $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $f_{\frac{1}{n}}$ est la fonction racine n$^{\text{ième}}$.

4.2. Fonction dérivée

$\alpha \neq 0$, f_α est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\boxed{f'_\alpha(x) = \alpha \times \frac{1}{x} \times e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}}$$

4.3. Limites

a) $\boxed{\alpha < 0}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \alpha \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty}$

La droite d'équation $\boxed{x = 0}$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f_α.

La droite d'équation $\boxed{y = 0}$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f_α en $+\infty$.

b) $\boxed{\alpha > 0}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \alpha \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0}$

On peut alors considérer la fonction g_α définie sur $[0;+\infty[$ par :

$g_\alpha(x) = 0$ $(= \lim\limits_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = 0)$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $g_\alpha(x) = f_\alpha(x)$

On dit alors que g_α est le prolongement de f_α par continuité en 0.

(On peut étudier la dérivabilité en 0 du prolongement par continuité de f_α)

4.4. Tableaux de variation

$\alpha<0$

x	0	$+\infty$
signe de $f_\alpha'(x)$	$-$	
variation de f_α	$+\infty \searrow 0$	

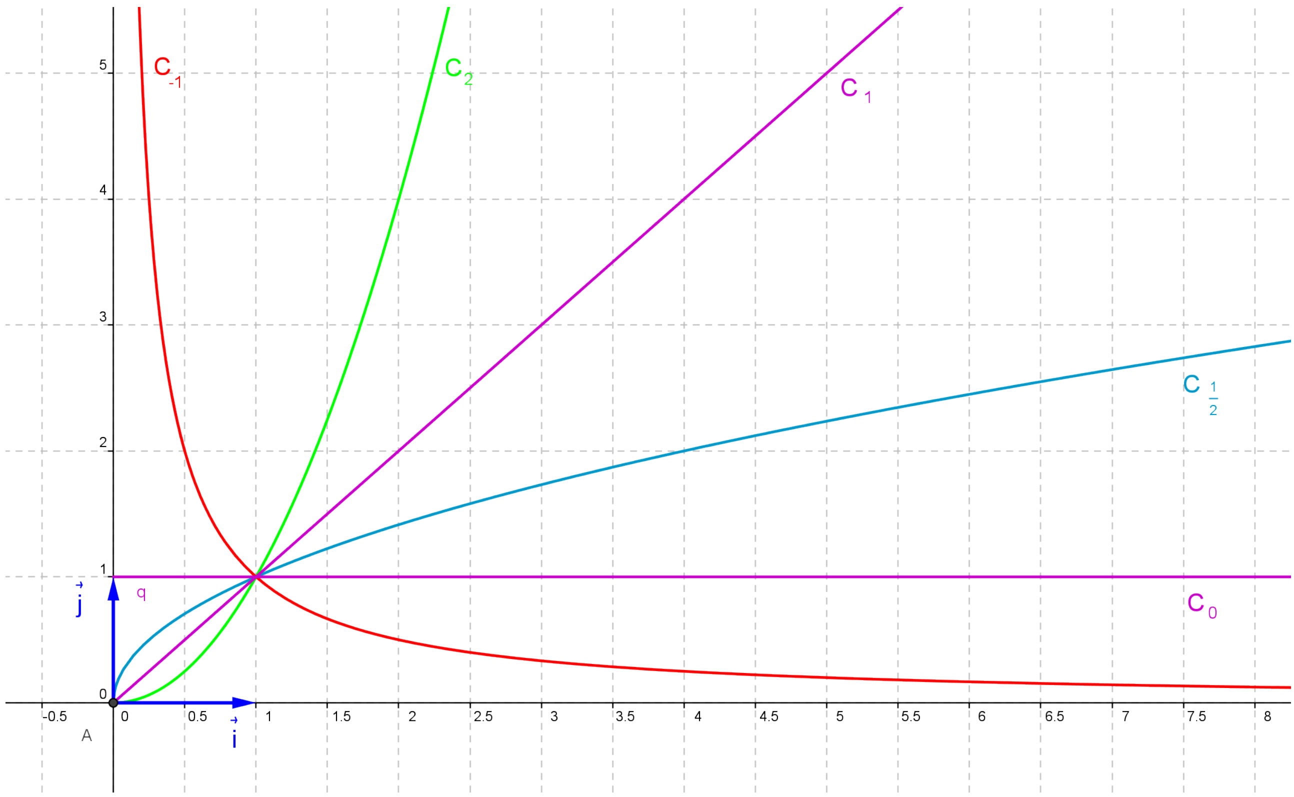
$\alpha>0$

x	0	$+\infty$
signe de $f_\alpha'(x)$	$+$	
variation de f_α	$0 \nearrow +\infty$	

4.5. Représentations graphiques

$f_\alpha(1)=1^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln 1}=1$

On trace les cas particuliers C_0 et C_1, puis C_{-1} ; C_2 et $C_{\frac{1}{2}}$.



5. Croissances comparées

5.1. Fonction logarithme et fonctions puissances en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$. Si $\alpha>0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}=+\infty$.

Nous avons déjà montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$.

$\ln x^{\alpha}=\alpha \ln x$ donc, $\dfrac{\ln \mathrm{x}}{\mathrm{x}^{\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{\ln \mathrm{x}^{\alpha}}{\mathrm{x}^{\alpha}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

Cas particuliers :

$n\in\mathbb{N}^*$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{n}}=0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0}$

On dit que **les fonctions puissances** (d'exposant strictement positif) **l'emportent** sur **la fonction ln** lorsque x tend vers $\boxed{+\infty}$.

5.2. Fonction exponentielle et fonctions puissances en $+\infty$

On peut démontrer que :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^{\alpha}}=+\infty}$ avec $\alpha>0$

Cas particuliers :

$n\in\mathbb{N}^*$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^{n}}=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{x}}=+\infty}$

On dit que **la fonction exponentielle l'emporte** sur **toutes les fonctions puissances** lorsque x tend vers $\boxed{+\infty}$.

5.3. Fonction logarithme et fonctions puissances en 0

On vérifie que :

$n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

5.4. Fonction exponentielle et fonctions puissances en $-\frac{n}{k}$

On vérifie que :

$n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$

6. Logarithmes décimaux

6.1. Définition

On nomme **fonction logarithme décimal**, la fonction log, définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

6.2. Propriétés

- $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$
- log est **dérivable** sur $]0;+\infty[$, $\log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$

log 10>0 donc **la fonction logarithme décimal** est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

$\forall a \in]0;+\infty[$ et $\forall b \in]0;+\infty[$

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$\boxed{\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{\log a^x=x\log a}$

Pour $\boxed{a=10}$, $\boxed{\log 10^x=x\log 10=x}$

$$\boxed{\log y=x \quad\Leftrightarrow\quad y=10^x}$$

6.3. Remarque

Avant l'utilisation des calculatrices en classe, on utilisait les logarithmes décimaux pour des calculs numériques.

$\forall a\in]0;+\infty[$ $\qquad a=x\times 10^m$ avec $x\in[1;10[$ et $m\in\mathbb{Z}$

$\log a=\log x+\log 10^m=m+\log x$
$1\leqslant x<10$ alors $0\leqslant\log 10<1$
$\log x$ est **la mantisse** de $\log a$.
m est **la caractéristique** de $\log a$.
Si a admet 4 chiffres significatifs, $\log x$ étant donné par « une table de logarithmes décimaux », la caractéristique m place la virgule parmi les chiffres significatifs.