## Exercice

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=5$

2. $(\sqrt{2})^x=8$

3. $2^x=4\times 3^{x+1}$

4. $x^{\frac{4}{11}}=16$

5. $\left(\frac{1}{4}\right)^x-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-10=0$

6. $\left(\frac{4}{11}\right)^x<8$

7. $5\times 2^x\leqslant 3^x$

**Correction :**

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=5 \Leftrightarrow e^{x\ln\frac{1}{2}}=e^{\ln 5} \Leftrightarrow x\ln\frac{1}{2}=\ln 5 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 5}{\ln\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 5}{\ln}2$

$\boxed{S=\{-\frac{\ln 5}{\ln 2}\}}$

2. $(\sqrt{2})^x=8 \Leftrightarrow e^{x\ln\sqrt{2}}=e^{\ln 8} \Leftrightarrow x\ln\sqrt{2}=\ln 8 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 8}{\ln\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2^3}{\ln 2^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow x=\frac{3\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2} \Leftrightarrow x=6$

$\boxed{S=\{6\}}$

3. $2^x=4\times 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x=4\times 3\times 3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}=12 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=12 \Leftrightarrow e^{x\ln\frac{2}{3}}=e^{\ln 12} \Leftrightarrow x\ln\frac{2}{3}=\ln 12 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 12}{\ln\frac{2}{3}}$

$\boxed{S=\left\{\frac{\ln 12}{\ln\frac{2}{3}}\right\}}$

4. $x^{\frac{4}{11}}=16 \Leftrightarrow e^{\frac{4}{11}\ln x}=e^{\ln 16} \Leftrightarrow \frac{4}{11}\ln x=\ln 16 \Leftrightarrow \ln x=\frac{11}{4}\ln 16=\frac{11}{4}\ln 2^4=11\ln 2 \Leftrightarrow x=e^{11\ln 2} \Leftrightarrow x=2^{11}$

$\boxed{S=\{2^{11}\}}$

5. $\left(\frac{1}{4}\right)^x-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-10=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-10=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-10=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X=\left(\frac{1}{2}\right)^x \\ X^2-3X-10=0 \end{cases}$

$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times(-10)=9+40=49$

$X_1=\frac{3-7}{2}=-2$ et $X_2=\frac{3+7}{2}=5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=-2$ est une équation qui ne possède pas de solution.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=5 \Leftrightarrow x=-\frac{\ln 5}{\ln 2}$

$\boxed{S=\{-\frac{\ln 5}{\ln 2}\}}$

6. $\left(\frac{4}{11}\right)^x < 8$

$\Leftrightarrow \quad e^{x\ln\frac{4}{11}} < e^{\ln 8}$

$\Leftrightarrow \quad x\ln\frac{4}{11} < \ln 8$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \quad x > \dfrac{\ln 8}{\ln\frac{4}{11}}$ ( $0 < \frac{4}{11} < 1$ donc $\ln\frac{4}{11} < 0$ )

$$\boxed{S = \left]\frac{\ln 8}{\ln\frac{4}{11}};+\infty\right[}$$

7. $5\times 2^x \leqslant 3^x$

$\Leftrightarrow \quad 5 \leqslant \frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

$\Leftrightarrow \quad e^{\ln 5} \leqslant e^{x\ln\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow \quad \ln 5 \leqslant x\ln\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln 5}{\ln\frac{3}{2}} \leqslant x$ $\left(0 < \ln\frac{3}{2}\right)$

$$\boxed{S = \left[\frac{\ln 5}{\ln\frac{3}{2}};+\infty\right[}$$