Exercice

On se propose de résoudre : $x^{\sqrt{2}} \leqslant (\sqrt{2})^x$

1. Étude et représentation graphique de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^{\sqrt{2}} \leqslant (\sqrt{2})^x$

Correction :

1.
$D=]0;+\infty[$
f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$

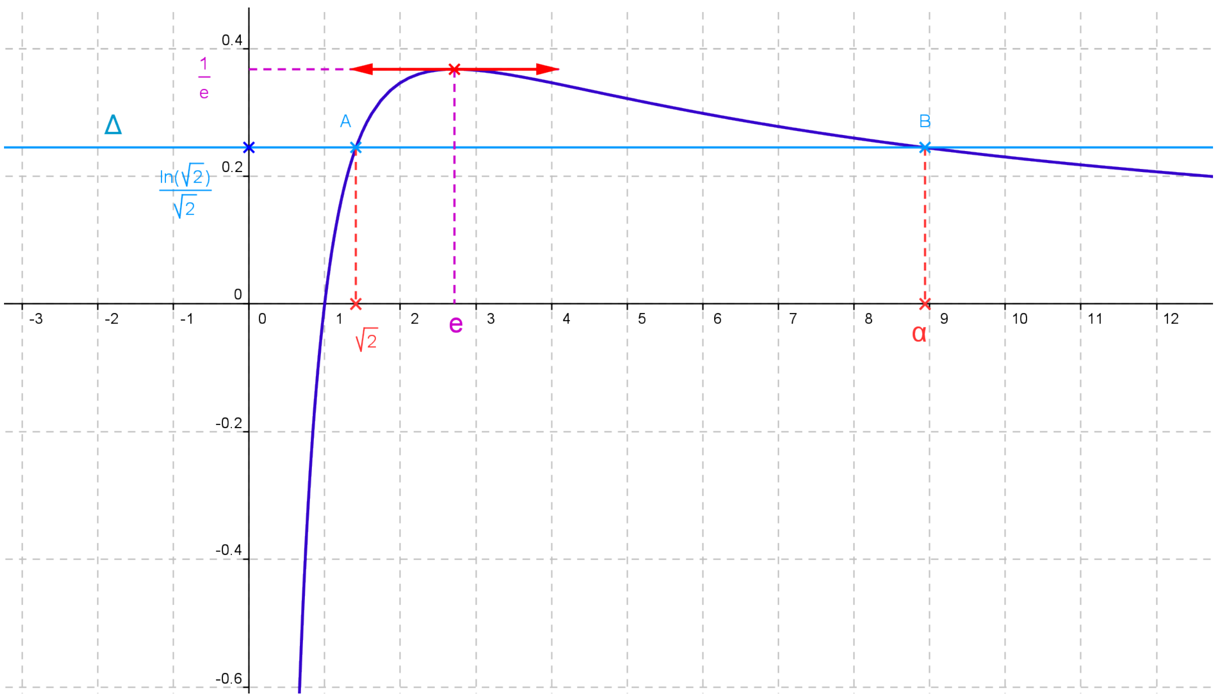
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$1-\ln x\geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln x\geqslant -1 \Leftrightarrow \ln x\leqslant 1=\ln e \Leftrightarrow 0<x\leqslant e$
$1-\ln x<0 \Leftrightarrow -\ln x<-1 \Leftrightarrow \ln x>1=\ln e \Leftrightarrow x>e$

$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \; et \; \lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$

La droite d'équation $\boxed{x=0}$ est **une asymptote verticale** et la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote horizontale à la courbe représentative** de f.

x	0		e		$+\infty$
signe de f ' (x)	‖	+	0	−	
variation de f(x)	‖ -∞	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



2.

$$x^{\sqrt{2}} \leqslant (\sqrt{2})^x$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{2}\ln x} \leqslant e^{x\ln\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\ln x \leqslant x\ln\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

On trace la droite Δ d'équation $y=\frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Elle coupe la courbe représentative de f en deux points d'abscisses respectives : $\sqrt{2}$ et α. (8,94 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près trouvée à la calculette).
Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés en dessous ou sur Δ. On obtient :
$\boxed{S=]0;\sqrt{2}[\cup]\alpha;+\infty[}$
(On peut retrouver ce résultat en utilisant les variations de f sur $]0;e[$ et sur $]e;+\infty[$)