Exercice

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1. a) Calculer la fonction dérivée g' de g.

Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

b) Déterminer le signe de $g'(x)$

2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. Déterminer la limite de g en 0.

4. a) Dresser le tableau de variations de g.
b) Construire la courbe représentative de g dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$
c) En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$
Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
d) Donner le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Correction :

1. a)

On pose $u(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et strictement positive.

$u'(x)=-\dfrac{2x}{x^4}=\dfrac{-2}{x^3}$ $\qquad u(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

$\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{-2}{x^3}\div\dfrac{x^2+1}{x^2}=\dfrac{-2}{x^3}\times\dfrac{x^2}{(x^2+1)}=\dfrac{-2}{x(x^2+1)}$

$\left(\dfrac{-2}{x^2+1}\right)'=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$$\boxed{g'(x)=\frac{-2}{x(x^2+1)}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2+1)+4x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{x(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}}$$

b)

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

Donc, le signe de $g'(x)$ est le signe de : $x-1$ sur $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
signe de g ' (x)	||	−	0	+	

2.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln u(x)=\ln 1=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{x^2+1}=0$

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0}$

3.

$\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln u(x)=+\infty$

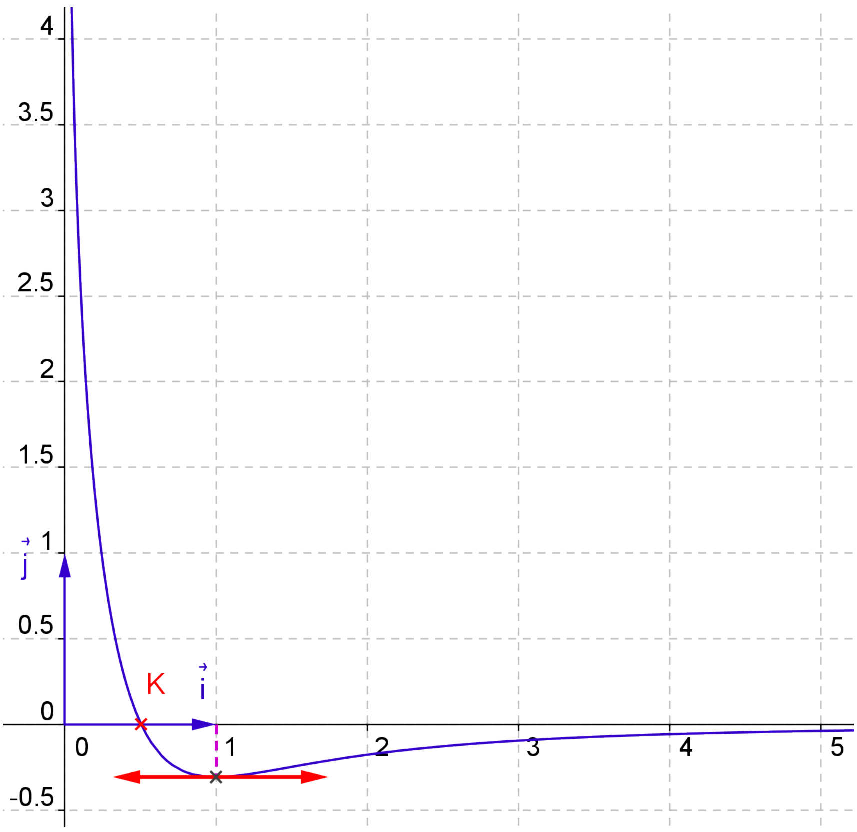
$\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{2}{x^2+1}=-2$

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty}$

4. a)

x	0		1		$+\infty$
signe de g ' (x)	‖	−	0	+	
variation de g	‖ $+\infty$	↘	ln2-1	↗	0

b)



c)
g est **continue** et **strictement décroissante** sur $]0;1[$ à valeurs sur $[\ln 2-1\,;+\infty[$
$0\in]\ln 2-1\,;+\infty[$ donc **0 admet un antécédent** α par g appartenant à $]0;1]$.
α est l'abscisse du point K intersection de la courbe et l'axe des abscisses.

g est **continue** et **strictement croissante** sur $[1\,;+\infty[$ à valeurs sur $[\ln 2-1\,;0[$ donc l'équation $\boxed{g(x)=0}$ **n'admet pas de solution** dans $[1\,;+\infty[$.

Conclusion :
Il existe α **unique** appartenant à $]0;1]$ tel que $\boxed{g(\alpha)=0}$.
En utilisant la calculatrice, on obtient pour valeur approchée de α à 10^{-2} près $0{,}51$ donc $0{,}5<\alpha<0{,}6$

d)
g est **strictement décroissante** sur $]0;1]$ donc :
Si $0<x<\alpha$ alors $g(x)>g(\alpha)=0$
Si $\alpha<x\leqslant 1$ alors $g(\alpha)=0>g(x)\geqslant g(1)$

g est **strictement croissante** sur $[1;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ donc si $1\leqslant x$ alors $g(x)<0$

Conséquence :

x	0		α		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$+$	0	$-$	