Définition d'une intégrale

Calcul intégral

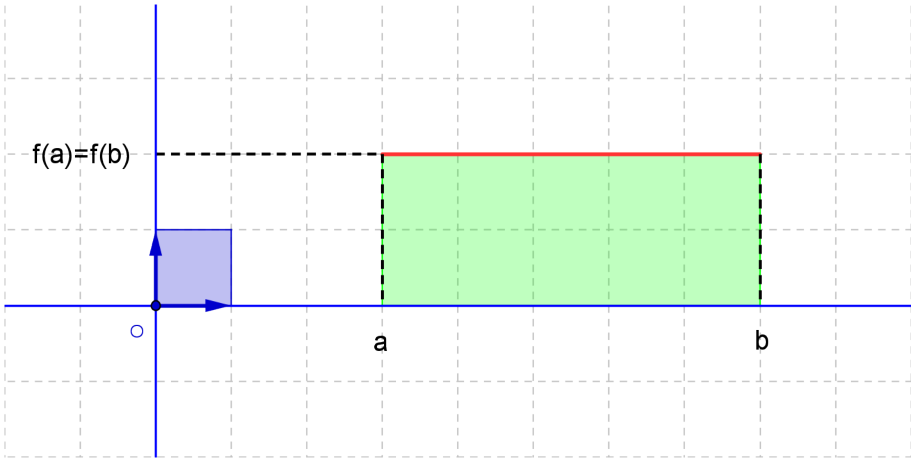
1. Introduction

Le repère est orthonormal donc l'unité d'aire est l'aire du carré dont le côté est égal à l'unité de longueur.

On considère des courbes représentatives de fonctions positives (simples) sur un intervalle $[a;b]$ $(a<b)$ et on se propose de calculer l'aire en U.A (unité d'aire) de la partie du plan comprise entre l'axe $(x'x)$ et la courbe et les droites d'équation : $x=a$ et $x=b$.

1.1. Exemple 1

f est une une fonction constante positive sur $[a;b]$.



$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie de plan considérée en U.A (l'aire du carré bleu).

$\mathcal{A}$ est l'aire d'un rectangle dont les longueurs des côtés sont respectivement $f(a)$ et $b-a$

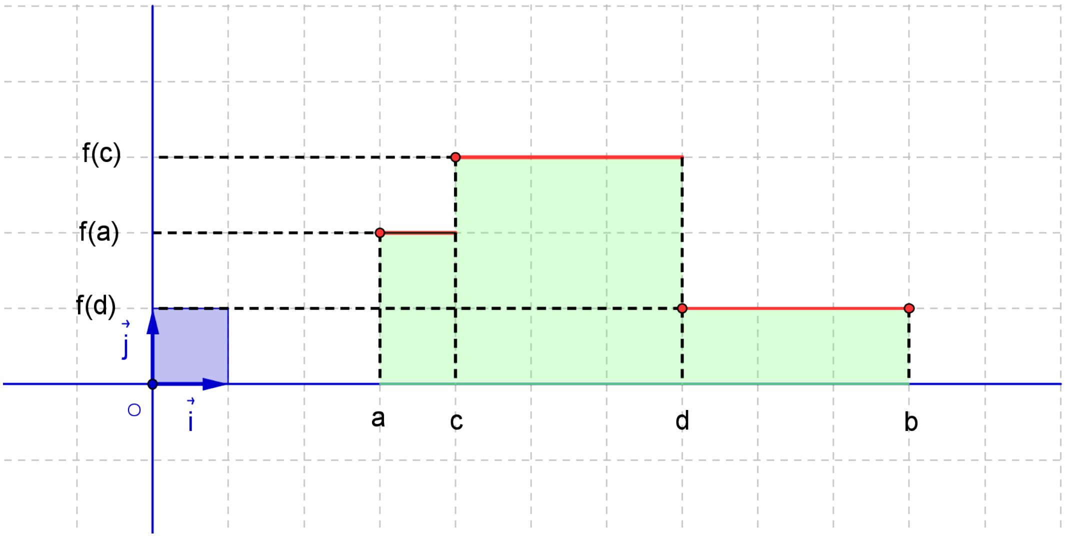
$\mathcal{A}=f(a)(b-a)$ U.A

Remarque :

Si f est la fonction nulle sur $[a;b]$ alors l'aire est nulle : $\mathcal{A}=0\times(b-a)=0$ U.A

1.2. Exemple 2

f est une fonction constante par morceaux (ou une fonction en escalier) positive sur $[a;b]$.

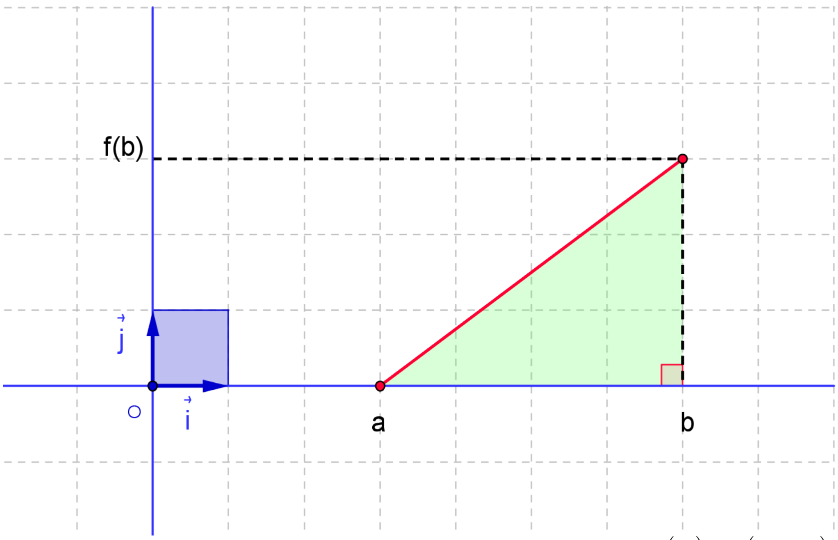


$\mathscr{A} = f(a)(c-a) + f(c)(d-c) + f(d)(b-d)$ U.A

1.3. Exemple 3

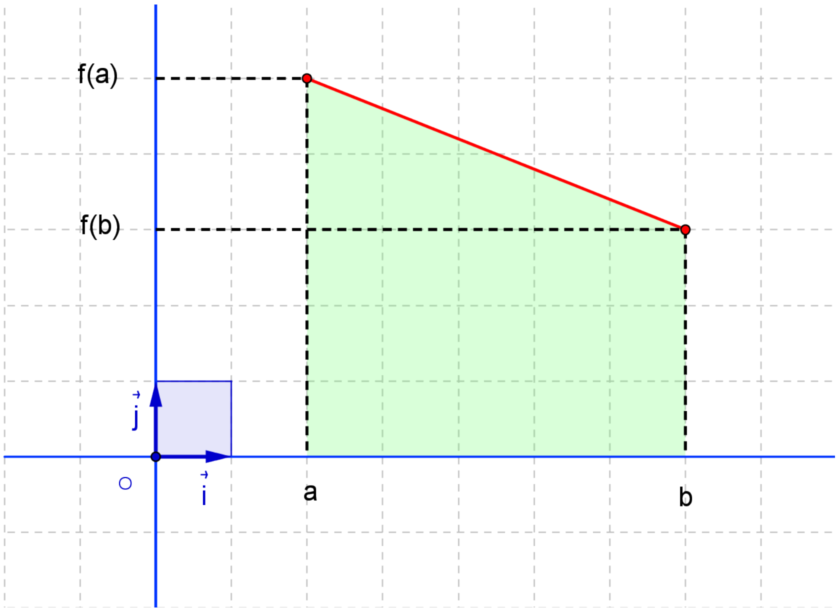
f est une fonction affine positive sur $[a;b]$.

a)



On calcule l'aire d'un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont $f(b)$ et $(b-a)$

$\mathscr{A} = \frac{1}{2} f(b)(b-a)$ U.A b)



On calcule l'aire d'un trapèze rectangle.

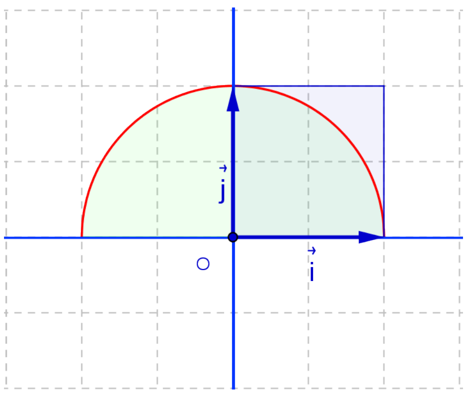
$\mathcal{A}=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)$ U.A

1.4. Exemple 4

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad [a;b]=[-1;1]$

$y=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ y\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

La courbe est un demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan situé au-dessus de l'axe $(x'x)$.



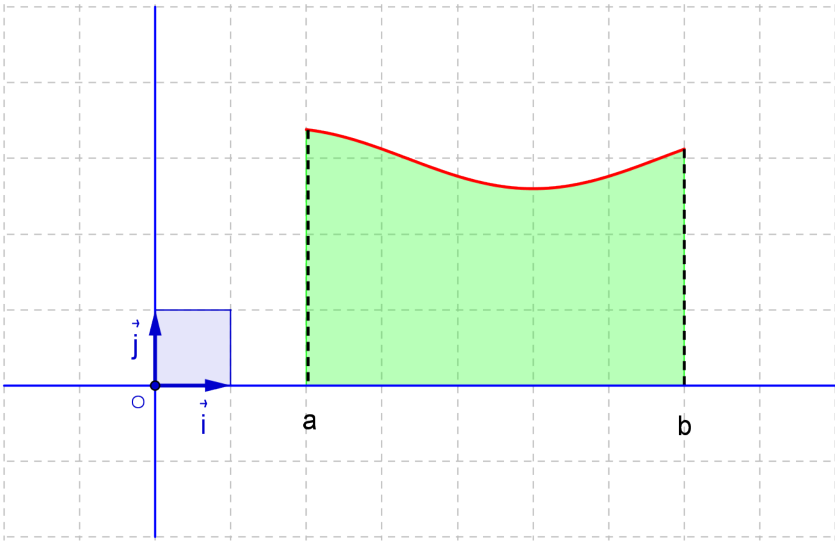
$\mathcal{A}=\frac{\pi\times 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$ U.A

2. Intégrale d'une fonction continue positive sur [a;b]

2.1. Définition

Soit f une fonction définie continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

On nomme **intégrale** de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, le nombre réel représentant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x=a$ et $x=b$.



2.2. Remarques

a) Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on peut remplacer x par toute lettre non encore utilisée.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

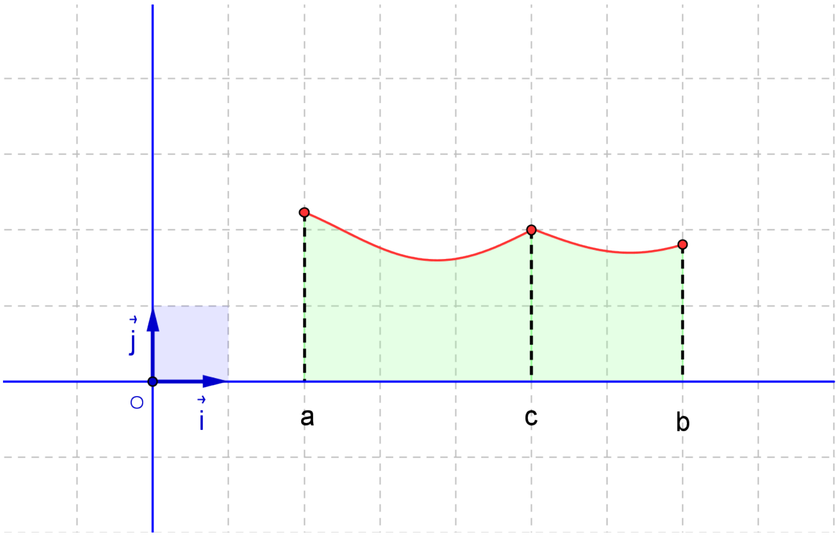
b) Exemples :

- exemple 1 : $\int_3^8 2\,\mathrm{d}x=2\times(8-3)=10$ U.A
- exemple 4 : $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ U.A

2.3. Relation de Chasles

Si f est une fonction continue positive sur $[a;b]$ et si $c\in[a;b]$ alors :

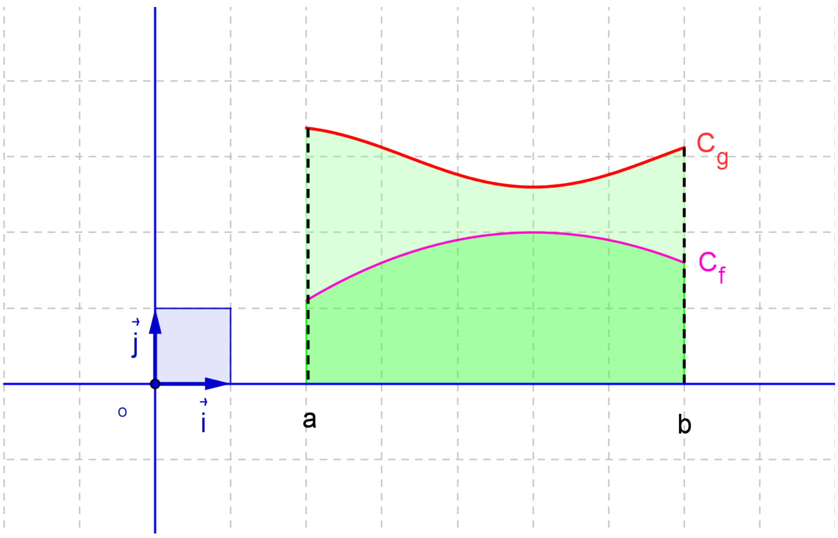
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



2.4. Lien avec la relation d'ordre

Si f et g sont des fonctions continues positives sur $[a;b]$ telles que $\forall x\in[a;b]$ $f(x)\leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$



2.5. Linéarité

Si f et g sont des fonctions continues positives sur $[a;b]$ et α et β deux nombres réels positifs, on a :

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

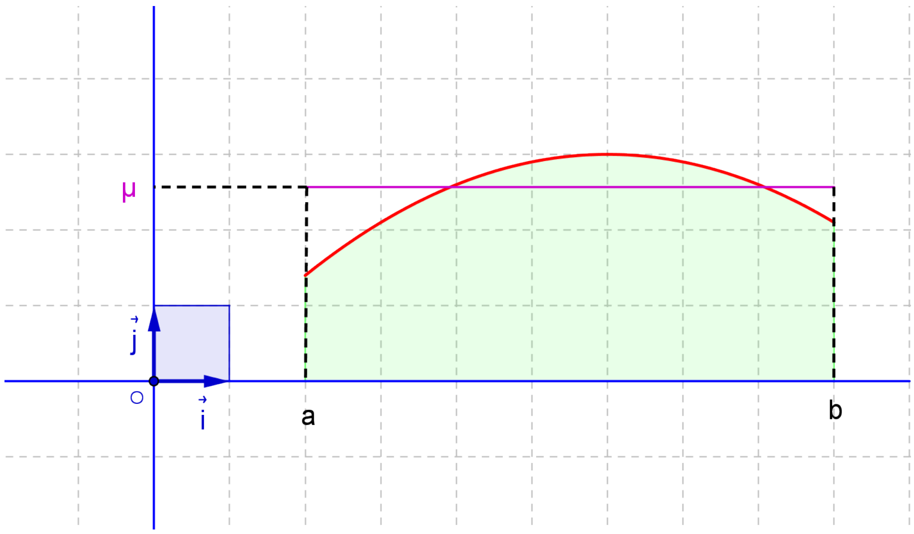
2.6. Valeur moyenne

Si f est une fonction continue positive sur $[a;b]$. On nomme **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ le réel : $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2.7. Conséquence

L'intégrale de la fonction continue et positive sur $[a;b]$ est l'aire (en U.A) du rectangle dont les côtés ont pour longueur : $b-a$ et μ

car $\mu\times(b-a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



2.8. Inégalité de la moyenne

Si f est une fonction continue, positive sur $[a;b]$ et m et M deux réels positifs tels que pour tout x de l'intervalle $[a;b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

Preuve :

Pour tout $x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x)$ donc :

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

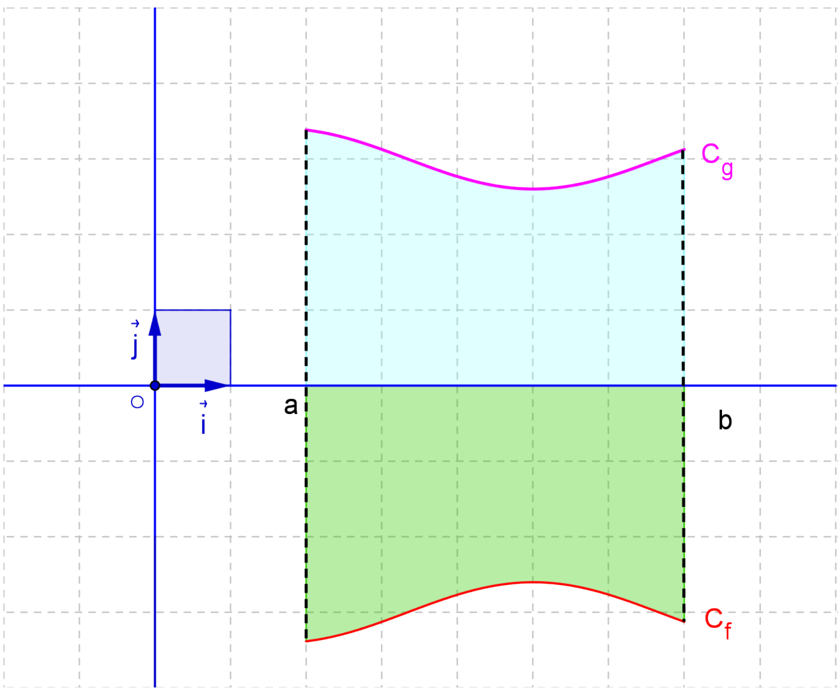
De même pour M...

3. Intégrale d'une fonction continue sur [a;b]

3.1. Définition

Soit f une fonction continue, négative sur l'intervalle $[a;b]$. On définit alors **l'intégrale** de f sur $[a;b]$ par : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$

La courbe représentative de $g=-f$ sur $[a;b]$ est le symétrique de celle de f par rapport à $(x'x)$.



3.2. Remarques

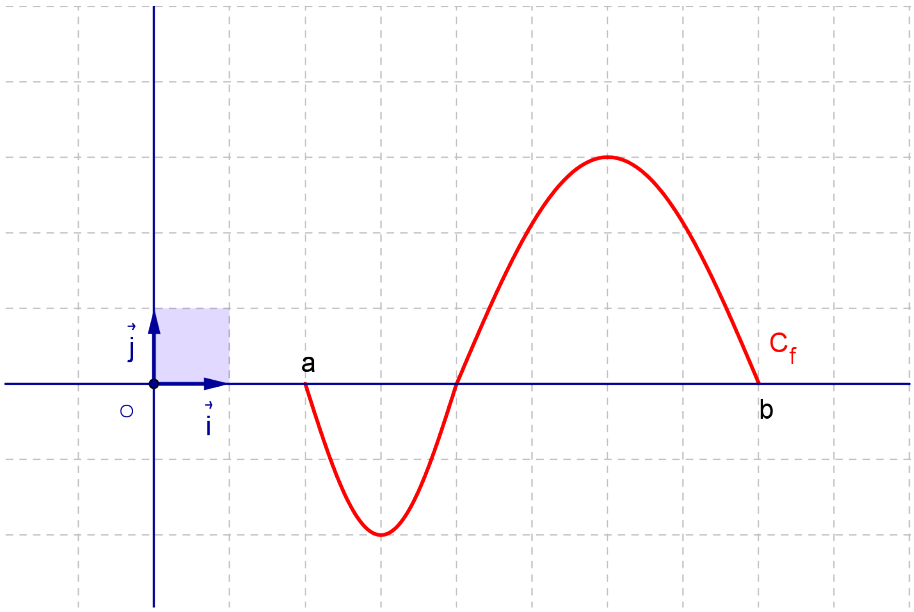
a) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un nombre négatif, on peut parler d'aire algébrique.

b) On peut étendre les propriétés 2.3 ; 2.4.... en considérant les fonctions f et g négatives.

3.3. Cas général

On suppose que f est continue et ne conserve pas une signe constant sur $[a;b]$.

On se place dans le cas où f change de signe un nombre fini de fois.



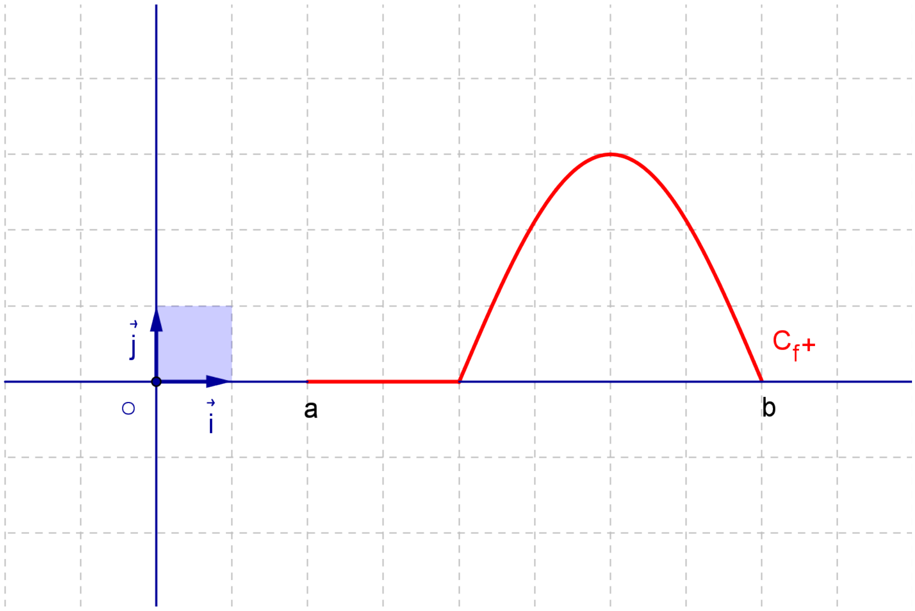
On définit alors deux fonctions f^+ et f^- sur $[a;b]$.

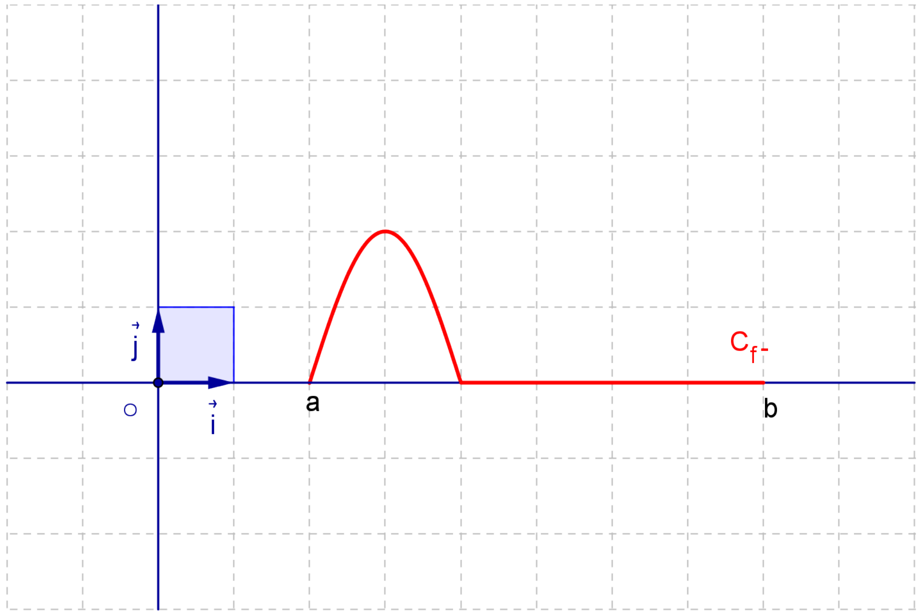
Si $f(x)\geqslant 0$ alors $f^+(x)=f(x)$ et $f^-(x)=0$

Si $f(x)\leq 0$ alors $f^+(x)=0$ et $f^-(x)=-f(x)$

f^+ et f^- sont deux fonctions positives ou nulles.

On suppose que ces deux fonctions sont continues sur $[a;b]$.





3.4. Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$. On définit alors l'intégrale de f sur $[a;b]$ par : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x$.

3.5. Propriétés

Si f et g sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ $(a<b)$ et si α et β sont des nombres réels (non nécessairement positifs) et si $c \in [a;b]$ alors :

a) Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) **Lien avec la relation d'ordre** :

Si $\forall x \in [a;b]\ \ f(x) \leqslant g(x)$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

c) **Linéarité** :

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

d) **Valeur moyenne** :

$\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

e) **Inégalité de la moyenne** :

Soient m et M deux réels tels que pour tout x de l'intervalle $[a;b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

3.6. Généralisation

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et et si $a;b$ et c appartiennent à I.

a) Si $a=b$, on pose $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$

b) Si $a>b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

c) (c n'appartient pas nécessairement à $[a;b]$)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

4.1. Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. On nomme **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F'=f$.

Exemples :

- $f(x)=\cos x$ — $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
  $F(x)=\sin x$ — $F'(x)=f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
  $G(x)=\sin x+3$ — $G'(x)=f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$
- $f(x)=\dfrac{1}{x}$ — $I=]0;+\infty[$
  $F(x)=\ln x$ — $F'(x)=f(x)$ donc F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

4.2. Théorème

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I et si a appartient à I alors la fonction F définie de I dans $\mathbb{R}$ par pour tout x de I, $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est **une primitive** de f sur I, c'est à dire $\forall x \in I \quad F'(x)=f(x)$.

preuve :

$x_0 \in I$; x_0 fixé. $x \in I$. $x \neq x_0$

Pour la démonstration, on suppose que f est continue et croissante sur I.

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^t f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

On utilise la relation de Chasles :

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si $x_0<x$ alors pour tout t appartenant à $[x_0;x]$, on a $f(x_0)\leqslant f(t)\leqslant f(x)$ (car f est croissante sur I)

  On pose $m=f(x_0)$ et $M=f(x)$

  En utilisant les inégalités de la moyenne, on obtient :

  $$f(x_0)\leqslant\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\leq f(x)$$

  c'est à dire : $f(x_0)\leqslant\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\leqslant f(x)$

  f est continue sur I donc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

  d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$

- Si $x<x_0$ alors pour tout t appartenant à $[x;x_0]$, on a $f(x)\leqslant f(t)\leqslant f(x_0)$ (car f est croissante sur I)

  On pose $m=f(x_0)$ et $M=f(x)$

  En utilisant les inégalités de la moyenne, on obtient :

  $$f(x)\leqslant\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\leq f(x_0)$$

  c'est à dire : $f(x)\leqslant\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\leqslant f(x_0)$

  f est continue sur I donc $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

  d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$

- Conséquence : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$

  Donc, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$

4.3. Remarques

a) On admet les résultat suivant.

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

b)

Deux primitives d'une même fonction continue sur le même intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve :

F et G sont deux primitives de f sur I donc :

$\forall x \in I,\ F'(x)=G'(x)=f(x)$

On considère la fonction : $d=F-G$

d est dérivable sur I,

$\forall x \in I, d'(x)=F'(x)-G'(x)=0$

Donc, d est une fonction constante sur I. Il existe un nombre réel k tel que :

$\forall x \in I, F(x)=G(x)+k$

Conséquence :

Les primitives de la fonction continue f sur I sont les fonctions définies sur I par : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+k$ (k constante réelle).

c)

Il existe **une primitive et une seule** d'une fonction continue sur I prenant une valeur fixée en un point donné de I.

Démonstration :

$x_0 \in I$ x_0 donné et $\lambda \in \mathbb{R}$ λ fixé.

On veut démontrer qu'il existe une unique primitive H de f (fonction continue sur I)vérifiant $H(x_0)=\lambda$.

$x \in I$ $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. F est une primitive de f sur I donc les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x)=F(x)+k$ (avec k constante réelle)

$G(x_0)=F(x_0)+k$

Si on veut obtenir $G(x_0)=\lambda$ alors :

$\lambda=F(x_0)+k$ donc $k=\lambda-F(x_0)$

$H(x)=F(x)+\lambda-F(x_0)$

$H(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\lambda-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t+\lambda$

4.4. Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $a \in I$ alors **l'unique primitive** F de f sur I vérifiant $F(a)=0$ est la fonction définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

4.5. Théorème (calcul intégral)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $a \in I$ et $b \in I$ et si G est une primitive de f sur I alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b)-G(a) = [G(t)]_a^b$

Démonstration :

On considère : $x \in I$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G(x)=F(x)+k$

$$G(b)-G(a)=F(b)+k-(F(a)+k)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

4.6. Exemples

- $\int_1^3 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln t]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$
- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

5. Recherche de primitives

5.1. Tableau de primitives

En utilisant les résultats sur les fonctions dérivées des fonctions usuelles, on peut établir un tableau de primitives usuelles en précisant l'intervalle I.

I	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	0	c (constante)
$\mathbb{R}$	a (constante)	$ax+c$
$\mathbb{R}$	x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	x^n ($n\in\mathbb{Z}$; $n\leqslant -2$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$]0;+\infty[$	x^α ($\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$)	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x+c
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x+c$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x+c$
$\left]\dfrac{-\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $k\in\mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x+c$
$]k\pi;k\pi+\pi[$ $k\in\mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+cotan^2 x$	$-cotan\,x+c$

5.2. Linéarité

Si F et G sont des primitives de f et g sur un intervalle I et si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ alors $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur I.

Exemple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 t+1)-1\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t+1\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt = [\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$$

5.3. Théorème

I et J sont 2 intervalles de $\mathbb{R}$

f est une fonction définie sur J et u est une fonction définie sur I.

On suppose que $u(I)\subset J$, c'est à dire que pour tout x de I, $u(x)\in J$.

On peut donc définir la fonction $f\,o\,u$ sur I.

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$I \xrightarrow[f\,o\,u]{} \mathbb{R}$$

$$f\,o\,u(x)=f[u(x)]$$

Si u est dérivable sur I et f continue sur J, soit F une primitive de f sur J alors $G=F\,o\,u$ est une primitive de $g=f\,o\,u\times u'$ sur I.

5.4. Conséquences

a)

f est continue sur J ; F une primitive de f sur J.

$a\in\mathbb{R}^*$ $b\in\mathbb{R}$ $u(x)=ax+b$. I est un intervalle tel que $u(I)\subset J$

Soit $h(x)=f(ax+b)$. h est définie sur I.

$H(x)=\dfrac{1}{a}F(ax+b)$. H est **une primitive** de h sur I.

<u>Exemple :</u>

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

b)

u est dérivable sur I. $n\in\mathbb{N}^*$

$g(x)=u^n(x)\times u'(x)$

$G(x)=\dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1}$. G est **une primitive** de g sur I.

<u>Exemple :</u>

Calculer $\displaystyle\int_0^1(x^2+2x-1)^3\times(2x+2)\,\mathrm{d}x$

$u(x)=x^2+2x-1$ $\qquad u'(x)=2x+2$

$$\int_0^1(x^2+2x-1)^3\times(2x+2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(x^2+2x-1)^4}{4}\right]_0^1=\frac{2^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=\frac{16}{4}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$$

c)

u est dérivable sur I. $n\in\mathbb{Z}$. $n\leqslant-2$.

$\forall x\in I$, $u(x)\neq 0$ donc $u(I)\subset\mathbb{R}^*$

$g(x)=u^n(x)\times u'(x)$

$G(x)=\dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1}$. G est **une primitive** de g sur I.

Exemple :

Calculer $\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

$u(x)=x^2+x+1 \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ u(x)\neq 0 \qquad u'(x)=2x+1$

$g(x)=u^{-2}(x)\times u'(x)$

$G(x)=\frac{u^{-1}(x)}{-1}=\frac{-1}{x^2+x+1}$

$\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx=\left[\frac{-1}{x^2+x+1}\right]_0^1=\frac{-1}{3}+1=\frac{2}{3}$

d)

u est dérivable sur I. $\alpha\in\mathbb{R}$. $\alpha\neq 0$. $\alpha\neq -1$.
$\forall x\in I,\ u(x)\neq 0\ (u(I)\subset\ ]0;+\infty[)$
$g(x)=u^{\alpha}(x)\times u'(x)$

$G(x)=\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$. G est **une primitive** de g sur I.

Exemple :

Calculer $\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

$u(x)=x^2+1>0 \qquad u'(x)=2x$

$g(x)=u^{\frac{-1}{2}}(x)\times u'(x)$

$G(x)=\frac{u^{\frac{1}{2}}(x)}{\frac{1}{2}}=2u^{\frac{1}{2}}(x)$

$\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx=\left[2\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^1=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0$

e)

u est dérivable sur I.
$\forall x\in I,\ u(x)>0\ (u(I)\subset\ ]0;+\infty[)$
$g(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

$G(x)=\ln(u(x))$. G est **une primitive** de g sur I.

Exemple :

Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{-2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$u(x)=1-x^2$ $\quad \forall x\in\left[\frac{-1}{2};0\right],\ u(x)>0$ $\quad u'(x)=-2x$

$g(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$

$G(x)=\ln(1-x^2)$

$\int_{-1}^{0} \frac{-2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\ln(1-x^2)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\ln 1-\ln\frac{3}{4}=-\ln\frac{3}{4}$

f)

u est dérivable sur I.
$g(x)=\mathrm{e}^{u(x)}\times u'(x)$
$G(x)=e^{u(x)}$. G est **une primitive** de g sur I.

Exemple :

Calculer $\int_0^1 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

$u(x)=x^2$ $\quad u'(x)=2x$

$g(x)=2xe^{x^2}$ $\quad G(x)=\mathrm{e}^{x^2}$

$\int_0^1 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1=\mathrm{e}-1$

5.5. Intégration par parties (désormais hors-programme du programme de TS)

Si f et g sont dérivables sur I et si f' et g' sont continues sur I et si $a\in I$ et $b\in I$
alors : $\boxed{\int_a^b f'(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t=\left[f(t)\times g(t)\right]_a^b-\int_a^b f(t)\times g'(t)\,\mathrm{d}t}$

Preuve :

$f\times g$ est dérivable sur I et $(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$

Donc, $f'\times g=(f\times g)'-f\times g'$

Les fonctions $f'\times g$; $(f\times g)'$; $f\times g'$ sont continues sur I et :

$$\int_a^b f'(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b (f\times g)'(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\times g'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f'(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t=\left[f(t)\times g(t)\right]_a^b-\int_a^b f(t)\times g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque :

Lorsque l'on utilise une intégration par parties pour calculer $\int_a^b f'(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t$, on est amené à calculer

$\int_a^b f(t)\times g'(t)\,\mathrm{d}t$ (qui doit être plus simple que la première intégrale).

5.6. Exemples

a) Calculer $\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ pour $x\in]0;+\infty[$

$f'(t)=1$ $\qquad f(t)=t$

$g(t)=\ln t$ $\qquad g'(t)=\frac{1}{t}$

f et g sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et f' et g' sont continues sur $]0;+\infty[$ donc :

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t=[t\times\ln t]_1^x-\int_1^x t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t=x\ln x-1\times\ln 1-\int_1^x 1\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t=x\ln x-[t]_1^x$$

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t=x\ln x-x+1$$

b) Calculer $\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t$ pour $x\in]0;+\infty[$

$f'(t)=t$ $\qquad f(t)=\frac{t^2}{2}$

$g(t)=\ln t$ $\qquad g'(t)=\frac{1}{t}$

f et g sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et f' et g' sont continues sur $]0;+\infty[$ donc :

$$\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\times\ln t\right]_1^x-\int_1^x \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\ln x-\int_1^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\ln x-\left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x$$

$$\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}$$

6. Remarques

6.1. Positivité de l'intégrale

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ f est une fonction continue sur I. a et b sont deux nombres réels de I. Si $a \leqslant b$ et si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Preuve :

$0 \leqslant f(x)$ donc $\int_a^b 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Donc :

$[k]_a^b \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$k-k \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

6.2. Calculs d'aires

a) Unité d'aire

Si $(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthogonal non orthonormé alors l'unité d'aire est égale à $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

b) Fonction positive

I est un un intervalle de $\mathbb{R}$ $a \in I$; $b \in I$ $a \leqslant b$

f est continue et positive sur $[a;b]$.

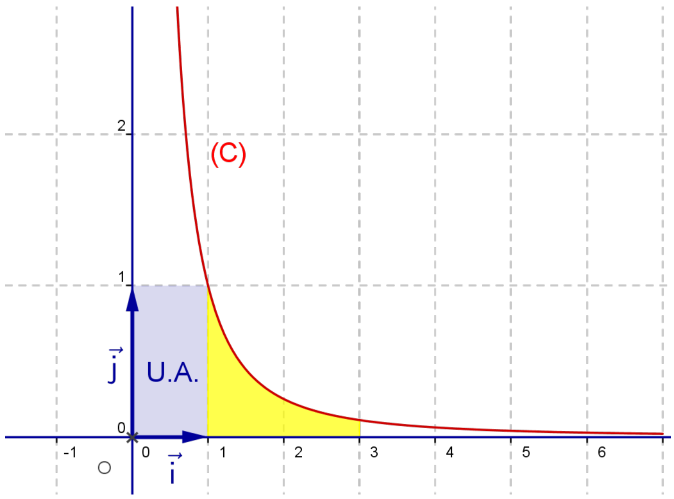
L'aire en U.A de la partie de plan limitée par la courbe représentative (C) de f dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=a$ et $x=b$ est $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple :

$I=]0;+\infty[$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\qquad [a;b]=[1;3]$

$\|\vec{i}\|=1\text{ cm}$ et $\|\vec{j}\|=2\text{ cm}$

$1\, U.A = 1 \times 2 = 2\, cm^2$



L'aire en U.A de la partie du plan comprise entre (C), $(x'x)$ et les droites d'équations : $x=1$ et $x=3$ est :

$A = \int_1^3 \frac{1}{x^2} \mathrm{d}\,x$ (car f est continue et positive sur $[1;3]$)

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} \mathrm{d}\,x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$A=\frac{2}{3}U.A$

C'est à dire que l'aire de cette partie de plan est égale à $\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$ en cm^2 .

c) Fonction négative

I est un un intervalle de $\mathbb{R}$ $a\in I$; $b\in I$ $a\leqslant b$

f est continue et négative sur $[a;b]$.

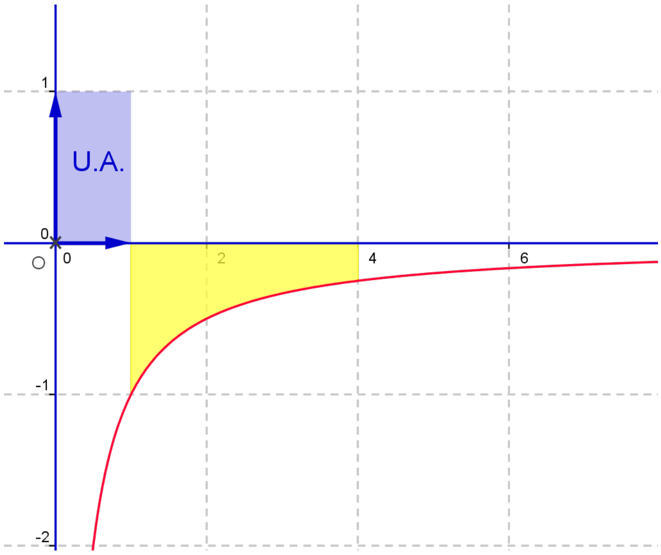
L'aire en U.A de la partie de plan limitée par la courbe représentative (C) de f dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=a$ et $x=b$ est $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple :

$I=]0;+\infty[$ $\qquad f(x)=-\frac{1}{x}$ $\qquad [a;b]=[1;4]$

$\|\vec{i}\|=1\,\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=2\,\text{cm}$

$1\,U.A=1\times 2=2\,cm^2$



f est continue et négative sur $[1;4]$.

L'aire en U.A de la partie de plan limitée par la courbe représentative (C) de f dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=4$ est $A=-\int_1^4 -\frac{1}{x}\,dx$.

$$A=-\int_1^4 -\frac{1}{x}\,dx=\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4\ U.A$$

C'est à dire l'aire est égale à $2\times\ln 4=\ln 4^2=\ln 16$ en cm^2

d) <u>Aire de la partie du plan comprise entre 2 courbes</u>

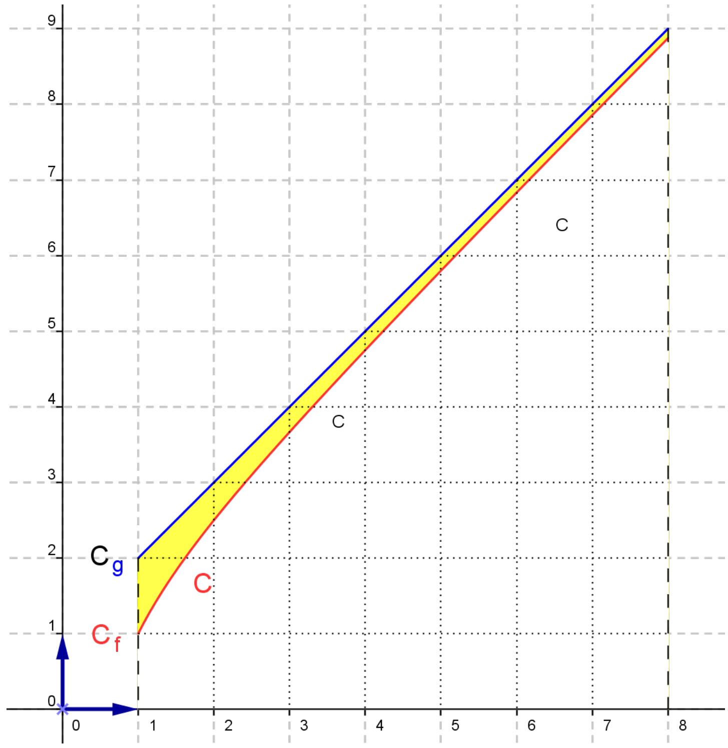
I est un un intervalle de $\mathbb{R}$ $a\in I$; $b\in I$ $a\leqslant b$

f et g sont continues sur $[a;b]$.

Si pour tout x appartenant à $[a;b]$ $f(x)\leqslant g(x)$ alors l'aire en U.A de la partie de plan comprise entre les 2 courbes représentatives de f et g dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'axe des abscisses et et les droites d'équations respectives $x=a$ et $x=b$ est $A=\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$.

<u>Exemple :</u>

$f(x)=x+1-\frac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x)=x+1$ $\qquad$ $[a;b]=[1;8]$



$g(x)-f(x)=\frac{1}{x}$

Pour tout x de $[1;8]$, $g(x)-f(x)\geqslant 0$ donc, l'aire en U.A de la partie de plan comprise entre les 2 courbes représentatives de f et g dans le repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=8$ est $A=\int_1^8 (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x$.

$$A=\int_1^8 (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x=\int_1^8 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_1^8=\ln 8-\ln 1=\ln 8\,U.A$$

<u>Remarque :</u>

On ne considère pas le signe de $f(x)$ ou le signe de $g(x)$ mais le signe de $g(x)-f(x)$.

