Exercice

1. Étude de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$. Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=ax^2\ln x+bx^2$, soit une primitive de f .

3. Calculer l'intégrale $\int_1^x t\ln t\,dt$ pour $x\in]0;+\infty[$.

4. Calculer l'aire en U.A de la partie de plan comprise entre la courbe (C), l'axe $(x'x)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2,5$ (donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

Correction :

1. $f(x)=x\ln x$

$D=]0;+\infty[$

f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$

$\boxed{f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1}$

$\ln x+1\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x\geqslant -1$

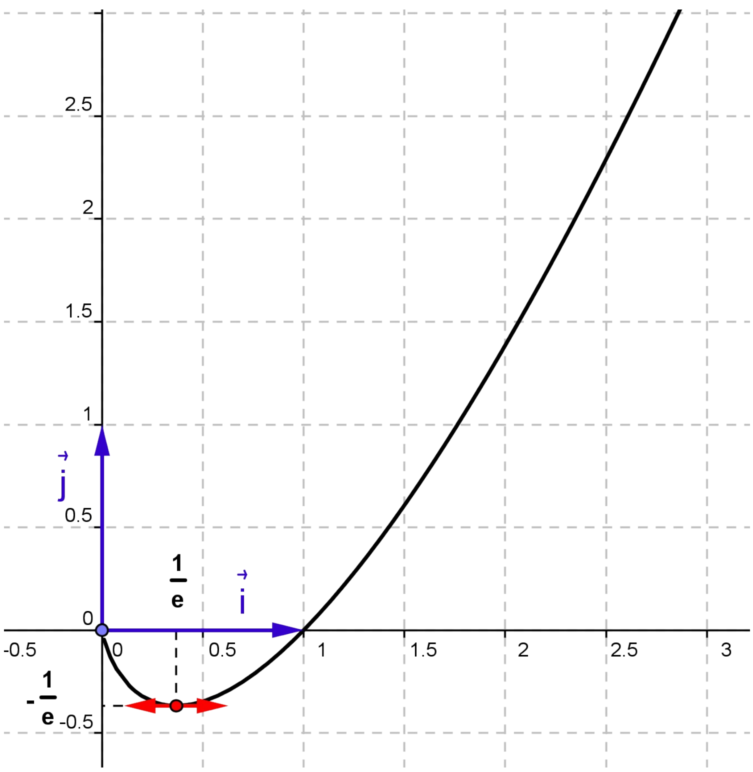
Or, $-1=\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

$\ln x+1\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x\geqslant \ln\left(\frac{1}{e}\right) \;\Leftrightarrow\; x\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\ln x+1<0 \;\Leftrightarrow\; \ln x<\ln\left(\frac{1}{e}\right) \;\Leftrightarrow\; 0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x\ln x=0}$ (voir démonstration dans le cours)

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
signe de f ' (x)		−	0	+	
variation de f(x)	0 ↘		$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$



2. F est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$F'(x)=2ax\ln x+ax^2\times\frac{1}{x}+2bx$$

$$F'(x)=2ax\ln x+(a+2b)x$$

Or, $f(x)=x\ln x$

La fonction F est une **primitive** de f sur $]0;+\infty[$ si et seulement si :

$2a=1$ et $a+2b=0$

$a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{4}$

Donc, $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}}$

3.

$$\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t=[F(t)]_1^x$$

$$\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{1^2}{2}\ln 1+\frac{1^2}{4}$$

$$\boxed{\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}}$$

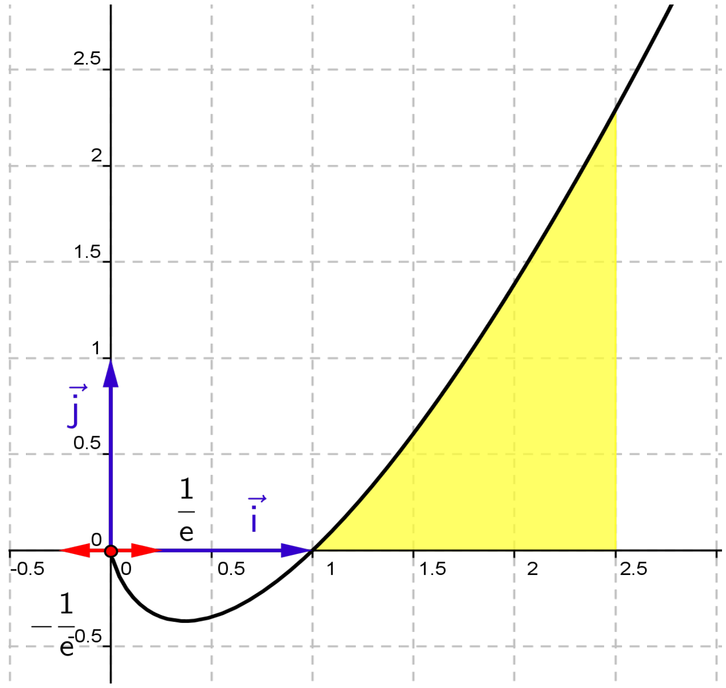
3.

f est **continue** et **positive** sur [1;2,5] donc **l'aire** A en U.A de **la partie de plan** comprise entre la courbe (C), l'axe $(x'x)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2{,}5$ est $\boxed{\int_1^{2,5} f(t)\,\mathrm{d}t}$.

$$A=\int_1^{2,5} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2{,}5^2}{2}\ln 2{,}5-\frac{2{,}5^2}{4}+\frac{1}{4}$$

$$A=\frac{6{,}25}{2}\ln 2{,}5-\frac{6{,}25}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\boxed{A=\frac{6{,}25}{2}\ln 2{,}5-\frac{5{,}25}{4}\,U.A\approx 1{,}55\,U.A}$$


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
$\vec{j}$
$\vec{i}$
$\frac{1}{e}$
$-\frac{1}{e}$
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5