Exercice

α est un nombre réel, $\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq 0$.

1. Soit g_α la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g_\alpha(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x$

a) Calculer $g'_\alpha(x)$

b) En déduire une primitive F_α sur $]0;+\infty[$ de f_α définie par $f_\alpha(x)=x^\alpha \ln x$.

c) Calculer $\int_1^x t^\alpha \ln t \, \mathrm{d}t$ pour $x \in]0;+\infty[$.

2. En utilisant les résultats précédents, calculer $\int_1^x (t^2+3t+1)\ln t \, \mathrm{d}t$ pour $x \in]0;+\infty[$.

Correction :

1. a) g_α est **dérivable** sur $]0;+\infty[$

$$g'_\alpha(x)=x^\alpha \ln x+\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\times\frac{1}{x}$$

$$g'_\alpha(x)=x^\alpha \ln x+\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}$$

b) $f_\alpha(x)=g'_\alpha(x)-\dfrac{x^\alpha}{\alpha+1}$

$$F_\alpha(x)=g_\alpha(x)-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}$$

$$\boxed{F_\alpha(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}}$$

c)

$$\int_1^x t^\alpha \ln t\,\mathrm{d}t=[F_\alpha(t)]_1^x$$

$$\boxed{\int_1^x t^\alpha \ln t\,\mathrm{d}t=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+\frac{1}{(\alpha+1)^2}}$$

2.

$$\int_1^x (t^2+3t+1)\ln t\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^2\ln t\,\mathrm{d}t+3\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t+\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x (t^2+3t+1)\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{1}{9}+3\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\right)+x\ln x-x+1$$

$$\boxed{\int_1^x (t^2+3t+1)\ln t\,\mathrm{d}t=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}-x+\frac{67}{36}}$$