Exercice

1. Étude de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2. Calculer l'intégrale $\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$ pour $x\in]0;+\infty[$.

3. Calculer l'aire en U.A de la partie de plan comprise entre la courbe (C), l'axe $(x'x)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$. (donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

Correction :

1.

$D =]0;+\infty[$

f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

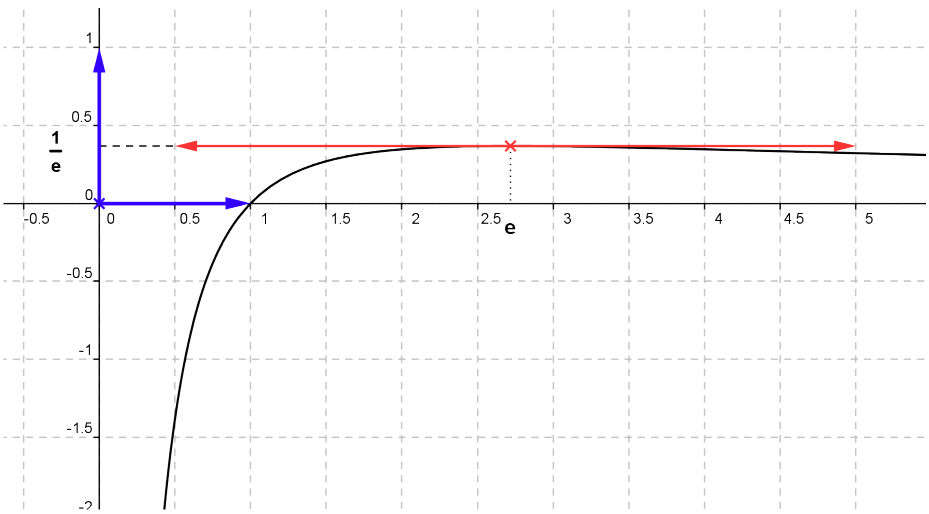
$1 - \ln x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\ln x \geqslant -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x \leqslant 1 = \ln e \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leqslant \mathrm{e}$

$1 - \ln x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\ln x < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x > 1 = \ln e \quad \Leftrightarrow \quad x > \mathrm{e}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \; et \; \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

La droite d'équation $\boxed{x=0}$ est **une asymptote verticale** et la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote horizontale à la courbe représentative** de f.

x	0		e		+∞
signe de f ' (x)		+	0	−	
variation de f(x)	-∞	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



2.

$u(t) = \ln t \qquad\qquad u'(t) = \frac{1}{t}$

Donc, $f(t) = u(t) \times u'(t)$ et donc $\boxed{F(t) = \frac{1}{2} u^2(t) = \frac{1}{2} \ln^2(t)}$

$$\boxed{\int_1^x \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2} \ln^2(t)\right]_1^x = \frac{1}{2} \ln^2(t)}$$

3. f est **continue** et **positive** sur [1;3] donc **l'aire** A en U.A de **la partie de plan** comprise entre la courbe (C), l'axe $(x'x)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$ est $\boxed{\int_1^3 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t}$.

$$\boxed{A=\int_1^3 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln^2(3)\,U.A\approx 0{,}6\,U.A}$$