Exercice

1. Soit g définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=(1+x)\ln(1+x)$

a) Calculer $g'(x)$

b) En déduire une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=\ln(1+x)$

c) Pour $x\in]-1;+\infty[$, calculer l'intégrale $\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$

2. En utilisant les résultats précédents, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\mathrm{d}t$ pour $x\in]0;+\infty[$.

Correction :

1.a) g est **dérivable** sur $]-1;+\infty[$.

$$g'(x)=1\times\ln(1+x)+(1+x)\times\frac{1}{1+x}$$

$$\boxed{g'(x)=\ln(1+x)+1}$$

b) $f(x)=\ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$

$f(x)=g'(x)-1$

Donc, F définie sur $]-1;+\infty[$ par $F(x)=g(x)-x$ est **une primitive** de f sur $]-1;+\infty[$.

$$\boxed{F(x)=(x+1)\ln(x+1)-x}$$

c) $\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]_0^x$

$$\boxed{\int_1^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=(x+1)\ln(x+1)}$$

2. $\int_1^x \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_1^x \ln(1+t)-\ln t\,\mathrm{d}t$

$$\int_1^x \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_1^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t-\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\mathrm{d}t = [(t+1)\ln(t+1)-t]_1^x-[t\ln t-t]_1^x$$

$$\int_1^x \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\mathrm{d}t=(x+1)\ln(x+1)-x-2\ln 2+1-x\ln x+x-1$$

$$\int_1^x \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\mathrm{d}t=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x-2\ln 2$$

