Exercice

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x}$.

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $\int_{0}^{x} t\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}\,t$ pour $x\in\mathbb{R}$.

2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^{2}e^{x}$

a) Déterminer les réels a , b et c tels que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=(at^2+bt+c)\mathrm{e}^{x}$ soit une primitive de g sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $\int_{0}^{x} t^2\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}\,t$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Correction :

1.a) F est **dérivable** sur $\mathbb{R}$

$F'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

F est **une primitive** de f sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x :

$(ax+a+b)e^x=xe^x$

C'est à dire $ax+a+b=x$ pour tout réel x

Donc, $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

Donc, $\boxed{F(x)=(x-1)e^x}$

$$\int_0^x t\,e^t\,dt=[F(t)]_0^x$$

$$\boxed{\int_0^x t\,e^t\,dt=(x-1)e^x+1}$$

2. a) G est **dérivable** sur $\mathbb{R}$

$G'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x$

$G'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$

G est **une primitive** de g sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x :

$(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x=x^2e^x$

C'est à dire $ax^2+(2a+b)x+b+c=x^2$ pour tout réel x

Donc, $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

Donc, $\boxed{G(x)=(x^2-2x+2)e^x}$

b) $\int_0^x t^2\,e^t\,dt=[G(t)]_0^x$

$$\boxed{\int_0^x t^2\,e^t\,dt=(x^2-2x+2)e^x-2}$$