Exercice

1. Soit f la fonction définie sur [0 ;+∞[par $f(x)=xe^x-1$.

a. Déterminer la limite de la fonction f en +∞ et étudier le sens de variation de f.

b. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ;+∞[. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont données en annexe 1.

Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x .

On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $e^x>\ln(x)$.

a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x=\alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

b. En utilisant la question 1., montrer que $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

3. a. Soit h la fonction définie sur]0;+∞[par $h(x)=x\ln(x)-x$. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur]0 ;+∞[.

b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface colorée sur la figure jointe en annexe 1.

Correction :

1. a.

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$ donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

f est **dérivable** sur $[0;+\infty[$.

$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

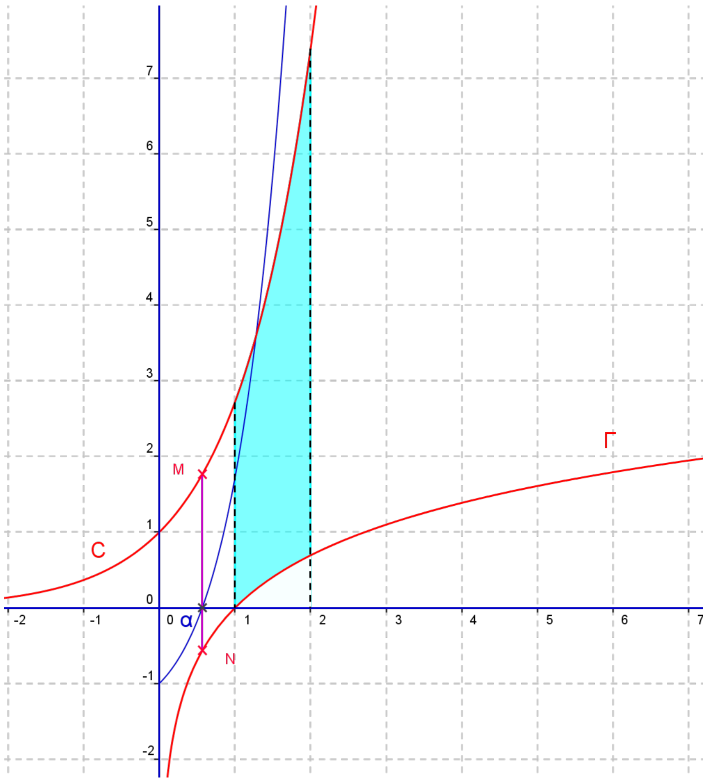
Donc, pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f'(x)>0$ et f est **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$.

b. f est **continue** et **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$; $f(0)=-1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Donc, en utilisant **le théorème des valeurs intermédiaires**, il existe un unique $\alpha\in[0;+\infty[$ tel que $\boxed{f(\alpha)=0}$.

Remarque : $f(1)=e-1>0$ donc $\alpha\in]0;1[$.

La calculatrice donne pour valeur approchée à 10^{-2} près : $\alpha\approx 0,57$.

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a tracé la courbe représentative de f .



c. Si $0\leqslant x<\alpha$ alors $\boxed{f(x)<f(\alpha)=0}$

Si $\alpha<x$ alors $\boxed{f(\alpha)=0<f(x)}$

x	0		α		$+\infty$
Signe de f(x)		$-$	0	$+$	

2. a. $M(x\,;e^x)$ $N(x\,;\ln x)$ $x\in]0\,;+\infty[$

$MN=|e^x-\ln x|=e^x-\ln x$

On pose $g(x)=e^x-\ln x$ pour $x\in]0\,;+\infty[$.

g est **dérivable** sur $]0\,;+\infty[$.

$g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{xe^x-1}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$. Le **signe** de $g'(x)$ est **le signe** de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	

$g(\alpha)$ est le minimum de g sur $]0\,;+\infty[$. En utilisant la calculatrice, $g(\alpha)\approx 2{,}23$.

Sur la figure précédente, nous avons tracé la valeur minimale de MN.

b. $f(\alpha)=0$ donc $\alpha e^{\alpha}-1=0$, donc $\boxed{e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}}$.

$\mathscr{C}$: $y=e^x$ $(e^x)'=e^x$. Le **coefficient directeur** de la tangente à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse α est $\boxed{e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}}$.

Γ: $y=\ln x$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. Le **coefficient directeur** de la tangente à Γ au point M d'abscisse α est $\boxed{\dfrac{1}{\alpha}}$.

Les **deux coefficients directeurs** sont égaux donc **les deux tangentes sont parallèles**.

3. a. $h(x)=x\ln(x)-x$ $x\in]0\,;+\infty[$

h est **dérivable** sur $]0\,;+\infty[$

$h'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x$

Donc, h est **une primitive** de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;+\infty[$.

b. Pour tout $x\in[1\,;2]$, $e^x>\ln x$ et les fonctions exponentielles et logarithmes sont **continues** sur [1;2] donc l'aire A en U.A de **la partie du plan** comprise entre les deux courbes et les droites d'équations $\boxed{x=1}$ et $\boxed{x=2}$ est :

$$\int_1^2 e^x-\ln x\,dx=\left[e^x-h(x)\right]_1^2$$

$$\int_1^2 e^x-\ln x\,dx=\left[e^x-x\ln x+x\right]_1^2$$

$$\int_1^2 e^x-\ln x\,dx=e^2-2\ln 2+2-e^1+1\times\ln 1-1$$

$$\boxed{\int_1^2 e^x-\ln x\,dx=e^2-e-\ln 4+1\approx 4{,}28\ U.A}$$