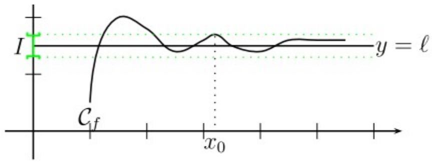
Limites de fonctions.

1. Définitions

1.1. Limite finie à l'infini

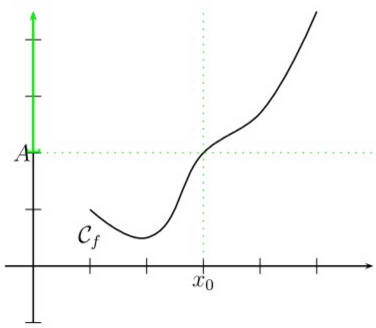
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$, où a est un nombre réel, et soit l un nombre réel.
On dit que f a pour **limite** l lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)=l}$
lorsque, pour tout intervalle ouvert I centré sur l, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in I$.



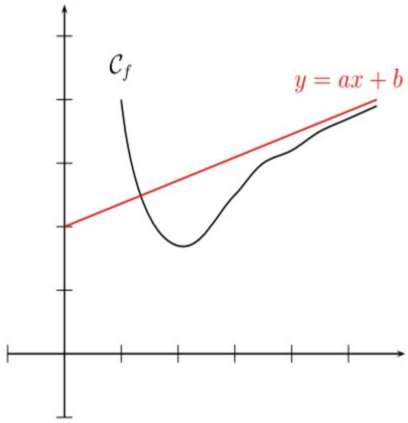
Si $\lim_{x \to +\infty} f(x)=l$, alors la droite d'équation $y=l$ est **une asymptote à la courbe** de f (au voisinage de $+\infty$).

1.2. Limite +∞ en +∞

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$, où a est un nombre réel.
On dit que f a pour **limite** $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty}$
lorsque, pour tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ où A est un nombre réel, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in [A;+\infty[$.



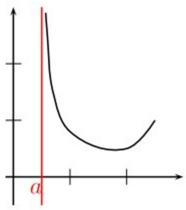
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\alpha;+\infty[$, et soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b))=0$, on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une **asymptote oblique** à la courbe de f (au voisinage de $+\infty$).

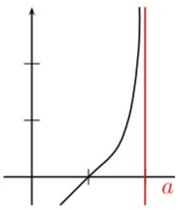


Remarque :
Les définitions précédentes sont à adapter lorsque x tend vers $-\infty$, et pour des limites égales à $-\infty$ au lieu de $+\infty$.

1.3. Limite infinie en un réel *a*

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;b]$ ou $[c;a[$, où a, b et c sont des nombres réels.
Si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut à condition de choisir x suffisamment proche de a, on écrit $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty}$.



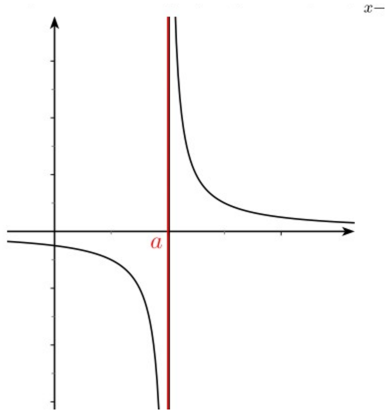


Remarque :

Soit I un intervalle et a un élément de I. Si f est définie sur $I-\{a\}$, on distingue deux limites en a :
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ (limite à droite de a, figure de gauche ci-dessus) et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ (limite à gauche de a, figure de droite ci-dessus).

Exemple:

Sur le graphique ci-après, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$



Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;b]$ ou $[c;a[$, où a , b et c sont des nombres réels.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$,alors la droite d'équation $x=a$ est **une asymptote verticale à la courbe** de f au voisinage de a .

Remarque :
Il convient d'adapter la définition précédente pour une limite à gauche de a , ou à droite de a .

2. Règles opératoires sur les limites

2.1. Limites usuelles

Soit n un entier naturel non nul.
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

La **limite à l'infini d'une fonction polynôme** est égale **à la limite à l'infini de son terme de plus haut degré**.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Soit n un entier naturel non nul.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Soit n un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2.2. Opérations sur les limites de fonctions

Dans tout ce qui suit, a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. FI signifie **forme indéterminée**, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de règle pour la limite étudiée.

- Limite d'une somme de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

- Limite d'un produit de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Limite de l'inverse d'une fonction

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+ (en restant positive)	0^- (en restant négative)
Alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} =$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

- Limite du quotient de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
Alors $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) =$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	FI	FI

2.2. Limite d'une fonction composée

u et v sont deux fonctions telles que $v \circ u :\ x \longmapsto u(x) \longmapsto v \circ u(x)$.

a, b et c désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = c$

Exemple :
Pour étudier $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1}$, on étudie d'abord $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty$ (terme de plus haut degré). Ensuite, on pose $X = x^2+1$.
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$,on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$.

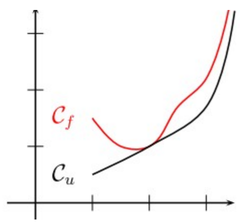
3. Théorèmes de comparaison des limites, théorème des gendarmes

3.1. Théorème de comparaison des limites

Dans tout ce qui suit, f, u et v sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I, et a est une borne de I.

Si, pour tout x appartenant à I, $u(x) \leqslant f(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Démonstration :
Dans le cas où a=+∞.



Soit un intervalle de la forme $[A;+\infty[$, où A est un nombre réel.
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, donc il existe un réel x_0 tel que, pour tout réel $x \geqslant x_0$, on a $u(x) \in [A;+\infty[$, c'est-à-dire $A \leqslant u(x)$.
On sait également que pour tout $x \in I$, $u(x) \leqslant f(x)$. On en déduit que, pour tout $x \geqslant x_0$, $A \leqslant u(x) \leqslant f(x)$, et on retient que $A \leqslant f(x)$, soit $f(x) \in [A;+\infty[$.
Ceci étant valable que que soit l'intervalle $[A;+\infty[$, on vient de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Si, pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant v(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

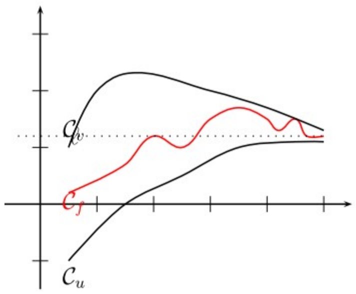
Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - x$. Pour tout réel x, on sait que $\sin(x) \leqslant 1$ donc $\sin(x) - x \leqslant 1 - x$

Comme $\lim_{x \to +\infty} 1-x=-\infty$, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} \sin(x)-x=-\infty$.

3.2. Théorème des gendarmes

Si, pour tout x appartenant à I, $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, et si $\lim_{x \to a} u(x)=\lim_{x \to a} v(x)=l$, avec $l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \to a} f(x)=l$.

Démonstration :
Dans le cas où a=+∞.



Soit un intervalle ouvert I centré en l, donc de la forme $]\alpha;\beta[$ avec l le centre de I.
On sait que $\lim_{x \to +\infty} u(x)=l$, donc il existe un réel x_0 tel que, pour tout réel $x \geqslant x_0$, on a $u(x) \in I$, c'est-à-dire : $\alpha<u(x)<\beta$.
On sait que $\lim_{x \to +\infty} v(x)=l$, donc il existe un réel x_1 tel que, pour tout réel $x \geqslant x_1$, on a $v(x) \in I$, c'est-à-dire : $\alpha<v(x)<\beta$.
On pose x_2 le plus grand des deux réels x_0 et x_1.
On sait également que pour tout $x \in I$, $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$. On en déduit que, pour tout $x \geqslant x_2$, $\alpha<u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)<\beta$, et on retient que $\alpha<f(x)<\beta$, soit $f(x) \in I$.
Ceci étant valable que que soit l'intervalle ouvert I centré en l, on vient de démontrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x)=l$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+\sin(x)}{x-1}$.

Pour tout $x \in]1;+\infty[$, $2x-1 \leqslant 2x+\sin(x) \leqslant 2x+1$.

Donc, puisque $x-1>0$, $\dfrac{2x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x+1}{x-1}$.

On a de plus $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x-1}=\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1}=2$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+\sin(x)}{x-1}=2$.

Remarque :
Il existe une autre version du théorème des gendarmes.

Si, pour tout x appartenant à I, $|f(x)-l| \leq u(x)$, avec $l \in \mathbb{R}$, et si $\lim_{x \to a} u(x)=0$ alors $\lim_{x \to a} f(x)=l$.

Démonstration :
On rappelle que, pour tout réel x et tout réel positif r, $|x|\leqslant r \Leftrightarrow -r\leqslant x\leqslant r$.

On sait que pour tout x appartenant à I,
$|f(x)-l|\leqslant u(x)$, soit encore $-u(x)\leqslant f(x)-l\leqslant u(x)$.
On a $\lim\limits_{x\to a} -u(x)=\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ donc, d'après le premier énoncé du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to a} f(x)-l=0$ d'où $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

3.3. Inégalités et limites

On admet la propriété suivante :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, et soit a une borne de I. Si, pour tout x appartenant à I, $f(x)<g(x)$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\in\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'\in\mathbb{R}$, alors $l\leqslant l'$.