Exercice

Vrai ou faux

Soit f une fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ telle que : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x^2$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, et $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=x^2$.

Répondre par vrai ou par faux aux affirmations suivantes, en justifiant la réponse :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x$.
2. Si f est dérivable sur I, alors $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 2x$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
4. Si $\mathscr{P}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}=1$.
5. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}=1$,alors $\mathscr{P}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction :

1. **FAUX**

Par exemple, $f(x)=x^2+\frac{1}{16}$

$f(x)\geqslant x^2$

Si $\frac{1}{8}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}$

alors $\frac{1}{64}\leqslant x^2\leqslant\frac{1}{16}$

donc $\boxed{f(x)=x^2+\frac{1}{16}\leqslant\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\leqslant\frac{1}{8}\leqslant x}$

2. **FAUX**

Par exemple: pour x appartenant à I, on pose: $f(x)=x^2+\frac{1}{x+1}$

Pour x appartenant à I, $f(x)\geqslant x^2$

f est dérivable sur I et pour x appartenant à I, $f'(x)=2x-\frac{1}{(x+1)^2}$

et $\boxed{f'(x)<2x}$

3. **VRAI**

$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

Or, pour tout x appartenant à I $f(x)\geqslant x^2$ donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

4. **VRAI**

Si la parabole est asymptote à la courbe représentative de f alors:

Pour tout x appartenant à I, $f(x)=x^2+h(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$

Donc, pour tout x appartenant à I, $\frac{f(x)}{x^2}=1+\frac{h(x)}{x^2}$ avec $\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x^2}=0$

Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1}$

5. **FAUX**

Par exemple: pour x appartenant à I, on pose: $f(x)=x^2+\frac{x^2}{x+1}$

Pour x appartenant à I, $f(x)\geqslant x^2$

Pour tout x appartenant à I, $\frac{f(x)}{x^2}=1+\frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

Par contre:

$f(x)-x^2=\frac{x^2}{x+1}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty}$$

Donc la parabole **n'est pas asymptote à la courbe représentative de *f*** en $+\infty$.