

Exercice

Vrai ou faux

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$, où a est un nombre réel. On suppose que f et g possèdent chacune une limite en $+\infty$ (égale à un réel, ou à $+\infty$, ou à $-\infty$). Répondre par vrai ou par faux aux affirmations suivantes, en justifiant la réponse :

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$
2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
3. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
4. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
5. Si, $\forall x \in]a; +\infty[$, $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, avec $l \in [0; 2]$.

Correction :**1. FAUX**

Par exemple:

$$f(x)=x^3 \text{ et } f(x)=x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)=+\infty$$

$$\text{Or, } f(x)-g(x)=x^3-x^2$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty}$$

2. FAUX

Par exemple:

$$f(x)=x^3 \text{ et } f(x)=x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)=+\infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x^2} = x \text{ et } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty}$$

3. VRAI

$$\text{Si } g(x) \neq 0, \quad f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x)$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\text{Donc, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}$$

4. VRAISi $x > 0$

$$f(x) = x f(x) \times \frac{1}{x}$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Donc: } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

5. VRAI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ Or } \frac{1}{x} \leq f(x) \text{ donc } 0 \leq l$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2. \text{ Or } f(x) \leq 2 + \frac{1}{x} \text{ donc } f(x) \leq 2$$

$$\text{Donc } \boxed{l \in [0; 2]}$$