Exercice

Utilisation d'un encadrement

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos x} \leqslant 1$

2. En déduire les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2-\cos x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\cos x}{x^2}$

Correction :

1. Pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant cosx \leqslant 1$

Donc, $-1 \leqslant -cosx \leqslant 1$

$-1+2 \leqslant 2-cosx \leqslant 1+2$

$0 < 1 \leqslant 2-cosx \leqslant 3$

Par suite, $\boxed{\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2-cosx} \leqslant 1}$

2. (a) D'après la question précédente, $\frac{x}{3} \leqslant \frac{x}{2-cosx} \leqslant x$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$

Donc, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2-cosx} = +\infty$

(b) De même, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

Donc, $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2-cosx} = -\infty}$

(c) Pour tout réel x différent de 0:

$\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{2-cosx}{x^2} \leqslant \frac{3}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

D'après **le théorème des gendarmes**: $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{2-cosx}{x^2} = 0}$