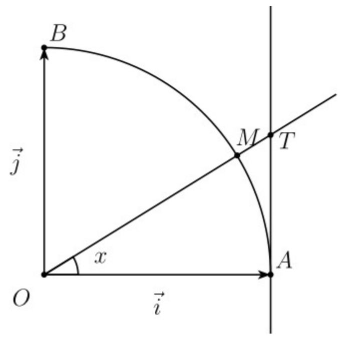
Exercice

Une limite à connaître par cœur

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. M est un point du cercle trigonométrique, tel que $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})=x+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$, où x désigne un réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.



On note $\mathscr{A}_{\text{OAM}}$ et $\mathscr{A}_{\text{OAT}}$ les aires respectives des triangles OAM et OAT, et $\mathscr{S}_{\text{OAM}}$ l'aire de la portion de disque comprise entre les segments [OA] et [OM].

1. En comparant les trois aires citées, montrer que pour tout $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$

2. En déduire que pour tout $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\cos x\leqslant\dfrac{\sin x}{x}\leqslant x$.

3. En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sin x}{x}$.

<u>Remarque :</u>

la fonction $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ étant une fonction paire sur son ensemble de définition, on peut en déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\sin x}{x}$ et on retiendra que $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

Correction :

1. $A_{AOM}=\frac{1\times \sin x}{2}=\frac{\sin x}{2}$

$A_{OAT}=\frac{1\times \tan x}{2}=\frac{\tan x}{2}$

$S_{OAM}=\pi\times 1^2\times\frac{x}{2\pi}=\frac{x}{2}$

Or, $A_{AOM}\leqslant S_{OAM}\leqslant A_{OAT}$

Donc:

$\frac{\sin x}{2}\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{\tan x}{2}$

Par suite:

$\boxed{\sin x\leqslant x\leqslant \tan x}$

2. Pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $0<\sin x\leqslant x\leqslant\frac{\sin x}{\cos x}$

Donc $\frac{\cos x}{\sin x}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{\sin x}$

D'où: $\cos x\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{\sin x}{\sin x}$

Et, donc: $\boxed{\cos x\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant 1}$

3. $\cos x\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1}$