Exercice

Méthode : Factoriser pour lever la forme indéterminée.

Si la factorisation ne suffit pas, utiliser l'expression conjuguée :

$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$ et $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$.

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}-2x$

2. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}+x$

3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}+x$

4. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+1}-\sqrt{x^2+1}$

5. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}-2x$

6. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-2}-\sqrt{x+7}$

Correction :

1. $\sqrt{x^2+3}-2x=x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x=x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2\right)$

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2=-1$

Donc: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-2x=-\infty}$

2. $\sqrt{x^2+3}+x=\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x}=\frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}$

$\lim_{x\to-\infty} x^2+3=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

Or, $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

Donc, $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$

Donc: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}-x=+\infty$

Et, donc: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}+x=0}$

3. $\lim_{x\to+\infty} x^2+x=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

Or, $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}+x=+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

Donc: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}+x=+\infty}$

4. $\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{x^2+1}=\frac{9x^2+1-x^2-1}{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{9x^2}{-x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-9x}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Donc: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{x^2+1}=+\infty}$

5. $\lim_{x \to -\infty} x^2+x+1 = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Or, $\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Donc, $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} -2\text{x} = +\infty$

Donc, $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} - 2x = +\infty}$

6. $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+7} = \dfrac{x-2-x-7}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+7}} = \dfrac{-9}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+7}}$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} = +\infty$

Donc, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x+7} = 0}$