

## Exercice

---

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - x + 5}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe de  $f$  possède une asymptote parallèle à l'axe des abscisses dont on donnera une équation.
3. Montrer que la courbe de  $f$  possède la droite d'équation  $y = 4x - \frac{1}{4}$  comme asymptote oblique.

**Correction :**

1.  $4x^2 - x + 5 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 5 = -79$$

Donc  $4x^2 - x + 5$  est strictement positif pour tout nombre réel  $x$ .

Donc, **l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .**

 2. Étude en  $+\infty$ 

$$f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - x + 5} = \frac{4x^2 - 4x^2 + x - 5}{2x + \sqrt{4x^2 - x + 5}} = \frac{x - 5}{2x + \sqrt{4x^2 - x + 5}} = \frac{x - 5}{2x \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{4x^2}} \right)}$$

$$f(x) = \frac{1 - \frac{5}{x}}{2 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{4x^2}} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{4x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{4x^2}} = 2$$

Donc,  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{4}}$

Donc la droite  $y = \frac{1}{4}$  est **asymptote à la courbe** en  $+\infty$ .

 Étude en  $-\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 - x + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$$

Or,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Donc,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - x + 5} = +\infty$

Par suite,  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$

 3. Étude en  $-\infty$ 

$$f(x) - 4x + \frac{1}{4} = -2x - \sqrt{4x^2 - x + 5} + \frac{1}{4} = \frac{4x^2 - 4x^2 + x - 5}{-2x + \sqrt{4x^2 - x + 5}} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{x \left( -2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{4x^2}} \right)} + \frac{1}{4}$$

$$f(x) - 4x + \frac{1}{4} = \frac{1 - \frac{5}{x}}{-2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{4x^2}}} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 4x + \frac{1}{4} = 0$$

Donc, la droite d'équation  $y = 4x - \frac{1}{4}$  est **asymptote à la courbe** en  $-\infty$ .