Exercice

Étude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{1-x}$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}-\{1\}$, on ait :

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{1-x}$.

2. (a) Montrer que la droite Δ, d'équation $y=-x+4$, est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

(b) Préciser la position relative de Δ et de $\mathscr{C}_f$

3. (a) Établir les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

(b) Établir le tableau de variation de f.

4. Dans un repère orthonormé d'unité 0,5 cm, tracer Δ et $\mathscr{C}_f$.

Correction :

1. $ax+b+\dfrac{c}{1-x}$

$=\dfrac{(ax+b)(1-x)+c}{1-x}$

$=\dfrac{ax-ax^2+b-bx+c}{1-x}$

$=\dfrac{-ax^2+(a-b)x+b+c}{1-x}$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$-{1},

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{1-x}=\dfrac{-ax^2+(a-b)x+b+c}{1-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a=1 \\ a-b=-5 \\ b+c=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=-3 \end{cases}$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$-{1}, $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{1-x}=-x+4+\dfrac{-3}{1-x}}$

2. (a) $f(x)-(-x+4)=\dfrac{-3}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x=\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$

Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} \dfrac{1}{X}=0$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-x}=0$

Par suite, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{1-x}=0}$

Donc, la droite Δ d'équation $\boxed{y=-x+4}$ est **une asymptote à la courbe** de la fonction f en $+\frac{n}{k}$.

De même, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{1-x}=0}$

Donc, la droite Δ d'équation $\boxed{y=-x+4}$ est **une asymptote à la courbe** de la fonction f en $-\frac{n}{k}$.

(b)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{-3}{1-x}$		$-$	$\Vert$	$+$	

Sur $]-\infty;1[$ **la courbe de la fonction *f* est en-dessous** de la droite Δ .
Sur $]1;+\infty[$ **la courbe de la fonction *f* est au-dessus** de la droite Δ .

3. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x+4=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x+4=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} -x+4=3$

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{-3}{1-x}=-\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty}$

$\lim\limits_{x\to1^+} -x+4=3$

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{-3}{1-x}=+\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty}$

(b) *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$-$\{1\}$. Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$-$\{1\}$:

$f'(x)=-1-\dfrac{3}{(1-x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-(1-x)^2-3}{(1-x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-1+2x-x^2-3}{(1-x)^2}$

$\boxed{f'(x)=\dfrac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}}$

$-x^2+2x-4=0$

$\Delta=2^2-4\times(-1)\times(-4)$

$\Delta=4-16$

$\Delta=-12$

Donc pour tout x réel, $-x^2+2x-4<0$

Et donc, Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$-$\{1\}$, $f'(x)<0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$	↘ $-\infty$

4.