Limite d'une suite.

Suites convergentes

1. Limite d'une suite

1.1. Limite infinie

a) *Définitions*

On dit que la suite (u_n) admet **pour limite +∞** si et seulement si, pour tout nombre réel A, tous les termes de la suite sont supérieur à A à partir d'un certain rang.

Il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à n_0, on ait $u_n > A$ $(u_n \in]A;+\infty[)$.

On note $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

On dit que la suite (u_n) admet **pour limite -∞** si et seulement si, pour tout nombre réel A, tous les termes de la suite sont inférieur à A à partir d'un certain rang.

Il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à n_0, on ait $u_n < A$ $(u_n \in]-\infty;A[)$.

On note $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

b) *Exemples*

- $u_n = 3n+2$. On veut démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Soit A un nombre réel.

$u_n > A \Leftrightarrow 3n+2 > A \Leftrightarrow n > \frac{A-2}{3}$

$\frac{A-2}{3}$ est un nombre réel donc compris entre 2 entiers consécutifs.

$E\left(\frac{A-2}{3}\right) \leqslant \frac{A-2}{3} < E\left(\frac{A-2}{3}\right)+1$

$E\left(\frac{A-2}{3}\right)$ est la partie entière de $\frac{A-2}{3}$.

On choisit $n_0 = E\left(\frac{A-2}{3}\right)+1$

Si, $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- $u_n = -n^2$. On veut démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Soit A un nombre réel.
$-n^2 < A$
Si $A \geqslant 0$, il suffit de choisir $n_0 = 1$. Si, $n \geqslant n_0$ alors $u_n < A$
Si $A < 0$ alors $A = -B$ avec $B > 0$ $(B = |A|)$
$u_n < A \Leftrightarrow -n^2 < A \Leftrightarrow -n^2 < -B \Leftrightarrow n^2 > B \Leftrightarrow n > \sqrt{B}$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
$E(\sqrt{-A}) \leqslant \sqrt{B} = \sqrt{-A} \leqslant E(\sqrt{-A}) + 1$
On choisit $n_0 = E(-\sqrt{A}) + 1$

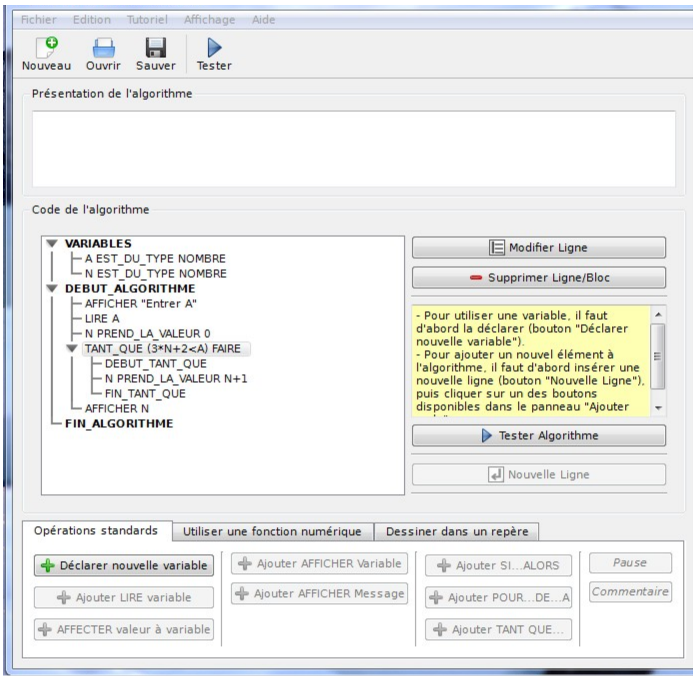
Si $n \geqslant n_0$ alors $u_n < A$
Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

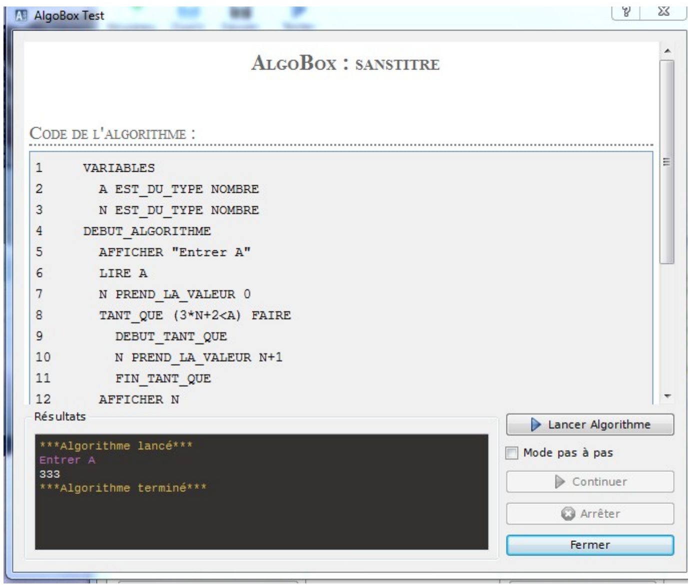
c) <u>Algorithmes</u>

- $u_n = 3n + 2$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Pour un réel A , on souhaite déterminer le rang à partir duquel $u_n \geqslant A$;
On construit un algorithme permettant de résoudre ce programme. Programmer, puis déterminer le rang à partir duquel $u_n \geqslant 1000$.

Avec Algobox :





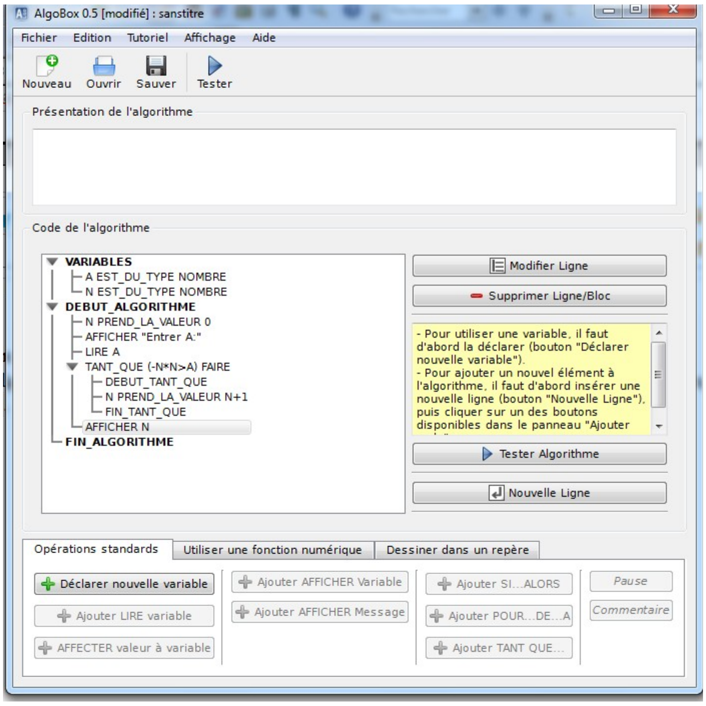
Avec une calculatrice TI :

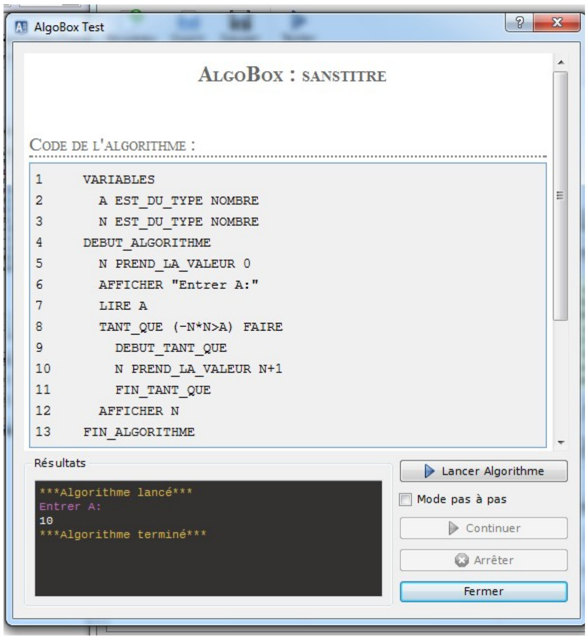
$u_n = -n^2$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Pour un réel A , on souhaite déterminer le rang à partir duquel $u_n \leq A$;
On construit un algorithme permettant de résoudre ce programme. Programmer, puis déterminer le rang à partir duquel $u_n \leq -100$.

Avec Algobox :





Avec une calculatrice TI :

1.2. Suites convergentes

a) *Définitions*

l est un nombre réel.

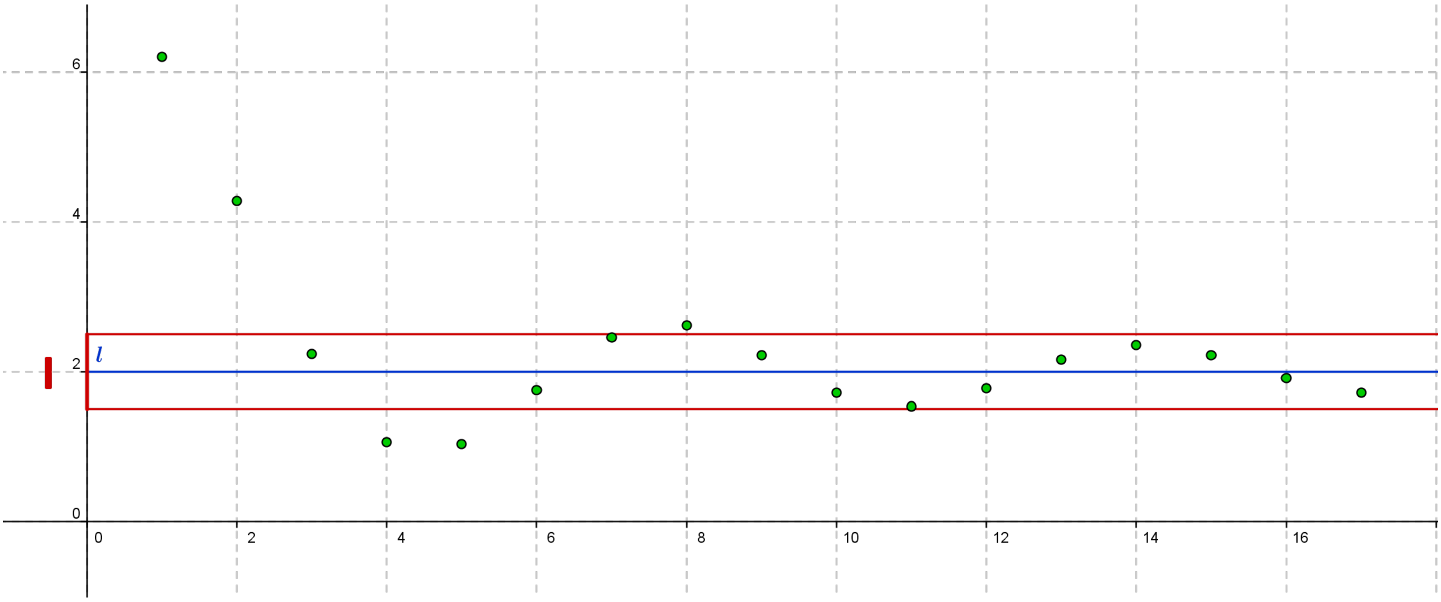
On dit que la suite (u_n) admet **pour limite l** si et seulement si, pour tout intervalle ouvert *I*, contenant *l*, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l}$

On dit alors que la suite (u_n) **converge vers l** et que la suite (u_n) est une **suite convergente**.

On nomme **suite divergente** toute suite non convergente.

b) *Interprétation graphique sur un exemple*



1.3. Proposition

Si une suite admet une limite alors celle-ci est **unique**.

Ce résultat est admis.

1.4. Remarques

a) Il existe des suites n'admettant pas de limite. Par exemple : $u_n = (-1)^n$.

Les termes de rangs pairs sont égaux à 1 et les termes de rangs impairs sont égaux à -1.

Conséquence :

Une **suite divergente** est une suite admettant **une limite infinie** ou n'admettant **pas de limite**.

b)

- Si $u_n = f(n)$ (pour tout entier naturel n)et si f admet l pour limite en $+\infty$ alors la suite (u_n) converge vers l .

Exemple :

$u_n=3-\dfrac{1}{n+1}$

$f(x)=3-\dfrac{1}{x+1}$.

f est définie sur $[0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

Donc, la suite (u_n) converge vers 3.

- Si $u_n=f(n)$ (pour tout entier naturel n)et si f admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

<u>*Exemple :*</u>

$u_n=4n^2-2$

$f(x)=4x^2-2$

f est définie sur $[0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Attention, si f n'admet pas de limite en $+\infty$ alors on ne peut pas conclure pour la limite de la suite (u_n) .

<u>*Exemple :*</u>

$f(x)=\sin(\pi x)$

f est définie sur $[0;+\infty[$ et f n'admet pas de limite en $+\infty$.

$u_n=f(n)=\sin(\pi n)=0$

(u_n) est la suite constante nulle : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

2. Limite et comparaison

2.1. Premier théorème de comparaison

(u_n) et (v_n) deux suites.

Si à partir d'un certain rang $v_n\geqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty}$.

<u>Démonstration :</u> La démonstration peut être l'objet d'une restitution organisée des connaissances au baccalauréat.

A partir d'un certain rang $v_n\geqslant u_n$, c'est à dire qu'il existe un entier naturel N tel que si $n\geqslant N$ alors $v_n\geqslant u_n$.

Soit A un nombre réel. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$, donc il existe un entier n_0 tel que :

Si $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$.

On pose N_0 le plus grand des entiers naturels $N_0 = max(N ; n_0)$ et n_0 (on note : $N_0 = max(N ; n_0)$ ou $N_0 = \text{Sup}(N ; n_0)$)

Si, $n \geqslant N_0$ alors $v_n \geqslant u_n$ et $u_n > A$ donc $v_n > A$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

2.2. Deuxième théorème de comparaison

(u_n) et (v_n) deux suites.
Si à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty}$.

La démonstration est analogue à la précédente.

2.3. Théorème des gendarmes

$(u_n) ; (v_n) ; (w_n)$ sont trois suites. l est un nombre réel.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ alors (v_n) est **une suite convergente et converge vers *l***.

Démonstration :

A partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, c'est à dire qu'il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Soit I un intervalle ouvert contenant l.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ donc il existe un entier naturel n_0 tel que : si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \in I$

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ donc il existe un entier naturel n'_0 tel que : si $n \geqslant n'_0$ alors $w_n \in I$

On pose N_0 le plus grand des entiers naturels $N ; n_0 ; n'_0$

Si, $n \geqslant N_0$ alors et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$; $u_n \in I$; $w_n \in I$ donc $[u_n ; w_n] \subset I$.

Et $v_n \in I$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

3. Opérations sur les limites

Les règles opératoires sur les limites de suites sont les mêmes que celles pour les limites de fonctions.

3.1. Limite d'une somme de suites

limite de (u_n)	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limite de (v_n)	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de (u_n+v_n)	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

3.2. Limite d'un produit de suites

limite de (u_n)	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
limite de (v_n)	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
limite de $(u_n \times v_n)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

3.3. Limite de l'inverse d'une suite

limite de u_n	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 (en restant positive)	0 (en restant négative)
$limite\ de\ (\frac{1}{u_n})$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

3.3. Limite du quotient de deux suites

limite de (u_n)	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	l	$+\infty$ ou $-\infty$	0
limite de (v_n)	$l' \neq 0$	0 $v_n>0$	0 $v_n<0$	0 $v_n>0$	0 $v_n<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$limite\ de\ (\frac{u_n}{v_n})$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	forme indéterminée	forme indéterminée

4. Cas particuliers

4.1. Suites arithmétiques

a) *Rappel*

(u_n) est **la suite arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r donc pour tout entier n :

$\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$ et $\boxed{u_n=u_0+nr}$

b) *Limite d'une suite arithmétique*

- Si $r>0$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$
- Si $r<0$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty}$
- Si $r=0$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=u_0}$

Remarque :

Pour $r=0$, (u_n) est la suite constante égale à u_0 .

Les seules suites arithmétiques convergentes sont les suites constantes (de raison 0).

4.2. Suites géométriques

a) *Rappel*

(u_n) est **la suite géométrique** de premier terme u_0 et de raison q donc pour tout entier n :

$\boxed{u_{n+1}=q\,u_n}$ et $\boxed{u_n=u_0\,q^n}$

b) *Théorème*

Si $q>1$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty}$

Démonstration :

La démonstration peut être l'objet d'une restitution organisée des connaissances au baccalauréat.

On pose $a=q-1>0$

$q=a+1$ avec $a>0$

Nous avons démontré dans la leçon 1 (par un raisonnement par récurrence) que pour tout entier naturel n,

$(1+a)^n \geqslant 1+na$

Or, $\lim_{n\to+\infty}(1+na)=+\infty$

En utilisant le théorème de comparaison, on peut conclure que $\lim_{n\to+\infty}(1+a)^n=+\infty$ soit $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

b) *Conséquence*

Si $0<q<1$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n=0}$

Si $q=1$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n=1}$

Si $q=0$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n=0}$

Si $-1<q<0$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n=0}$

Si $q=-1$ alors (q^n) n'admet pas de limite.

Si $q<-1$ alors (q^n) n'admet pas de limite.

Démonstration

- Si $0<q<1$

On pose $q'=\dfrac{1}{q}>1$.

$\lim_{n\to+\infty} q'^n=+\infty$ et $q^n=\dfrac{1}{q'^n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$

- Si $-1<q<0$

$q=-q'$ avec $q'>0$
$q^n=(-q')^n=(-1)^n q'^n$
et $-q'^n \leqslant q^n \leqslant q'^n$
Or, $0<q'<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} q'^n=0$
Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$

- Si $q<-1$

$q=-q'$ avec $q'>1$
Si n est pair alors $q^n=q'^n$
Si n est impair alors $q^n=-q'^n$
Donc, (q^n) n'admet pas de limite.

d) *Limite d'une suite géométrique*

$u_n = u_0 q^n$ (on suppose $u_0 \neq 0$)

Si $q>1$ et $u_0>0$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

Si $q>1$ et $u_0<0$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

Si $q=1$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0}$

Si $-1<q<1$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Si $-q \leq -1$ alors la suite (u_n) n'admet pas de limite.

e) *Remarque*

$-1<q<1$
$S_n = u_0 + \ldots + u_{n-1}$
$S_n = u_0 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$

5. Suites monotones

5.1. Théorèmes

Toute suite ***croissante et majorée*** est ***convergente***.

Toute suite ***décroissante et minorée*** est ***convergente***.

On admet ces résultats.

5.2. Propositions

Si (u_n) est une suite ***croissante et non majorée*** alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Démonstration :

Soit A un nombre réel.

(u_n) n'est pas majorée donc il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

(u_n) est croissante donc pour tout entier naturel ou égal à n_0 , on a $u_n \geqslant u_{n_0} > A$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si (u_n) est une suite ***décroissante et non minorée*** alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

Démonstration :

La démonstration est analogue.

Si (u_n) est une suite ***croissante et majorée*** donc convergente alors sa limite l est un majorant de la suite, c'est à dire pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant l$

Démonstration :

On effectue un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que $u_N > l$.

(u_n) est croissante, donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N , on a $u_n \geqslant u_N > l$.

On considère l'intervalle ouvert $I =]l-1\,;u_N[$ contenant l.

On n'a pas tous les termes de (u_n) appartenant à I à partir d'un certain rang puisque tous les termes de la suite de rang supérieur ou égal à N sont à l'extérieur de I.

Donc, si on suppose l'existence de N , on démontre que la suite ne converge pas vers l.

Il n'existe pas d'entier naturel N et l est donc un majorant de (u_n) .

Si (u_n) est une suite ***décroissante et minorée*** donc convergente alors sa limite l est un minorant de la suite, c'est à dire pour tout entier naturel n : $u_n \geq l$

Démonstration :

La démonstration est analogue.