Exercice

On considère les suites (u_n) telles que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8u_n+1$

1. Premier cas : $u_0=0$

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8u_n+1=f(u_n)$ avec f fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0{,}8x+1$

a) *Interprétation graphique*

On trace dans le même repère la courbe représentative de f (droite d'équation $y=0{,}8x+1$) et la droite d'équation $y=x$.

$f(u_n)=u_{n+1}$ donc u_{n+1} est l'ordonnée du point M_n de la courbe représentative de f d'abscisse u_n .

$K_n(u_n;u_n)$ Est un point de la droite d'équation $y=x$.

$u_0=0$. Construire les points M_0 ; K_1 ; M_1 ; K_2 ;....

Quelles conjectures peut-on effectuer ?

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=5-u_n$ (remarque : 5 est l'abscisse ou l'ordonnée du point d'intersection I des deux droites).

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) Démontrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Deuxième cas : $u_0=7$

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8u_n+1=f(u_n)$

a) *Interprétation graphique*

b) Étudier les variations de f .

c) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n : $v_n=5-u_n$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) Démontrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

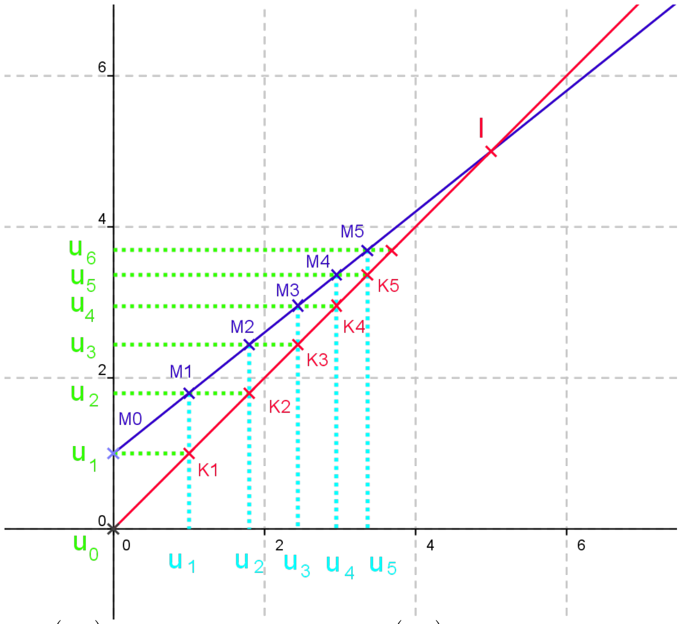
3. Troisième cas : $u_0=5$

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8u_n+1=f(u_n)$

Que peut-on conclure ?

Correction :

1. a)



On peut **conjecturer** que la suite (u_n) est **croissante** et que (u_n) est **convergente**.

b) $f(x)=0{,}8x+1$

f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$

On veut démontrer **en utilisant un raisonnement par récurrence** que la suite (u_n) est **strictement croissante**, c'est à dire pour tout entier naturel n , on a $u_n<u_{n+1}$.

Initialisation

$u_0=0$ $u_1=0{,}8\times 0+1=1$

$u_0<u_1$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

On suppose que pour tout entier naturel n , $u_n<u_{n+1}$ (hypothèse de récurrence). On doit démontrer que $u_{n+1}<u_{n+2}$.

$u_n<u_{n+1}$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$donc $f(u_n)<f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1}<u_{n+2}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet de conclure que la propriété est vérifiée pour tout entier naturel n , c'est à dire $u_n<u_{n+1}$.

c) Pour tout entier naturel n , $v_n=5-u_n$

$v_{n+1}=5-u_{n+1}$

$v_{n+1}=5-(0{,}8u_n+1)$

$v_{n+1}=4-0{,}8u_n$

$v_{n+1}=4-0{,}8(5-v_n)$

$v_{n+1}=4-4+0{,}8\,v_n$

$v_{n+1}=0{,}8\,v_n$

$v_0=5-u_0=5-0=5$

Donc, (v_n) est **la suite géométrique** de **raison** $\boxed{q=0{,}8}$ et de **premier terme** $\boxed{v_0=5}$.

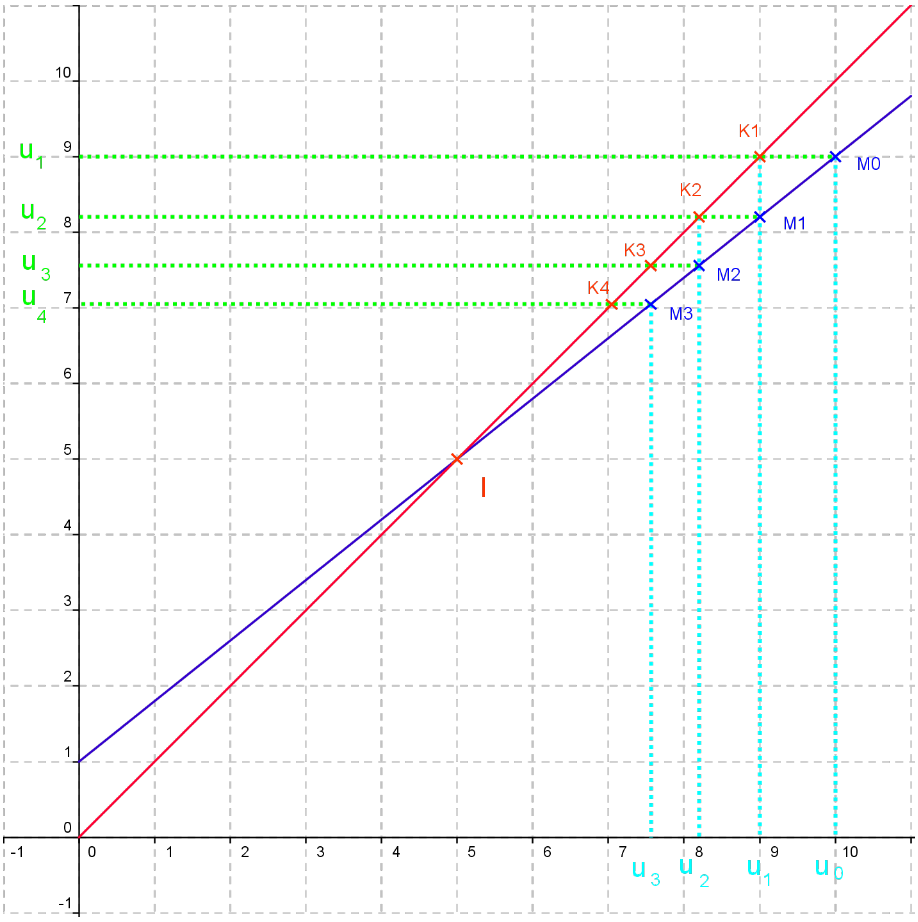
d) Pour tout entier naturel n , $v_n=5\times 0{,}8^n$, et donc $u_n=5-5\times 0{,}8^n$.

$-1<q<1$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

Donc, la suite (u_n) est **convergente** et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5}$.

2. $u_0=10$

a)



On peut **conjecturer** que la suite (u_n) est **décroissante** et que (u_n) est **convergente**.

b) $f(x)=0{,}8x+1$

f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$

On veut démontrer **en utilisant un raisonnement par récurrence** que la suite (u_n) est **strictement décroissante**, c'est à dire pour tout entier naturel n , on a $u_n>u_{n+1}$.

Initialisation

$u_0=10$ $\quad u_1=0{,}8\times 10+1=9$

$u_0>u_1$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

On suppose que pour tout entier naturel n , $u_n>u_{n+1}$ (hypothèse de récurrence). On doit démontrer que $u_{n+1}>u_{n+2}$.

$u_n>u_{n+1}$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$donc $f(u_n)>f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1}>u_{n+2}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet de conclure que la propriété est vérifiée pour tout entier naturel n , c'est à dire $u_n>u_{n+1}$.

c) Pour tout entier naturel n , $v_n=5-u_n$

$v_{n+1}=5-u_{n+1}$

$v_{n+1}=5-(0{,}8u_n+1)$

$v_{n+1}=4-0{,}8u_n$

$v_{n+1}=4-0{,}8(5-v_n)$

$v_{n+1}=4-4+0{,}8v_n$

$v_{n+1}=0{,}8v_n$

$v_0=5-u_0=5-10=-5$

Donc, (v_n) est **la suite géométrique** de **raison** $\boxed{q=0{,}8}$ et de **premier terme** $\boxed{v_0=-5}$.

d) Pour tout entier naturel n , $v_n=-5\times 0{,}8^n$, et donc $u_n=5+5\times 0{,}8^n$.

$-1<q<1$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

Donc, la suite (u_n) est **convergente** et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5}$.

3. $u_0=5$ alors $u_1=0{,}8\times 5+1=5$

On peut démontrer **par un raisonnement par récurrence** que la suite (u_n) est **la suite constante égale à 5**.

Remarque :

Les variations de la suite (u_n) dépendent de la valeur du premier terme.