Exercice

On considère les suites (u_n) telles que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=1{,}2\,u_n-1$

1. Premier cas : $u_0=2$

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=1{,}2\,u_n-1$

a) *Interprétation graphique*

b) Étudier les variations de la suite (u_n) .

c) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel par : $v_n=5-u_n$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

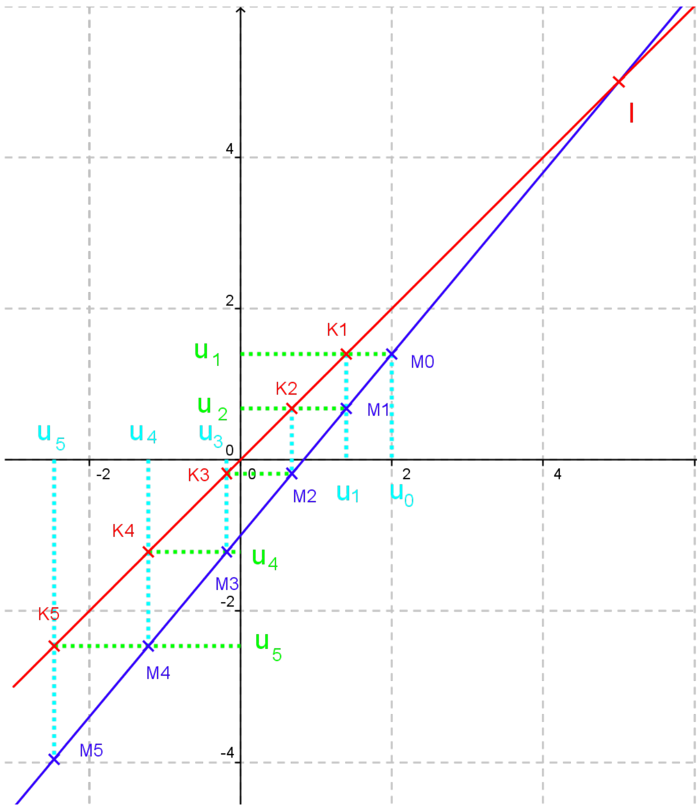
d) La suite (u_n) est-elle convergente ?

2. Deuxième cas : $u_0=7$

Mêmes questions

Correction :

1. a)



Conjectures : (u_n) est **décroissante** ; (u_n) est **divergente**.

b) $f(x)=1{,}2x-1$

f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$

On veut démontrer **en utilisant un raisonnement par récurrence** que la suite (u_n) est **strictement décroissante**, c'est à dire pour tout entier naturel n , on a $u_n > u_{n+1}$.

Initialisation

$u_0=2$ $\quad$ $u_1=1{,}2\times 2-1=1{,}4$

$u_0>u_1$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

On suppose que pour tout entier naturel n , $u_n>u_{n+1}$ (hypothèse de récurrence). On doit démontrer que $u_{n+1}>u_{n+2}$.

$u_n>u_{n+1}$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$donc $f(u_n)>f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1}>u_{n+2}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet de conclure que la propriété est vérifiée pour tout entier naturel n , c'est à dire $u_n>u_{n+1}$.

c) Pour tout entier naturel n , $v_n = 5 - u_n$

$v_{n+1} = 5 - u_{n+1}$

$v_{n+1} = 5 - (1{,}2\,u_n - 1)$

$v_{n+1} = 6 - 1{,}2\,u_n$

$v_{n+1} = 6 - 1{,}2\,(5 - v_n)$

$v_{n+1} = 6 - 6 + 1{,}2\,v_n$

$v_{n+1} = 1{,}2\,v_n$

$v_0 = 5 - u_0 = 5 - 2 = 3$

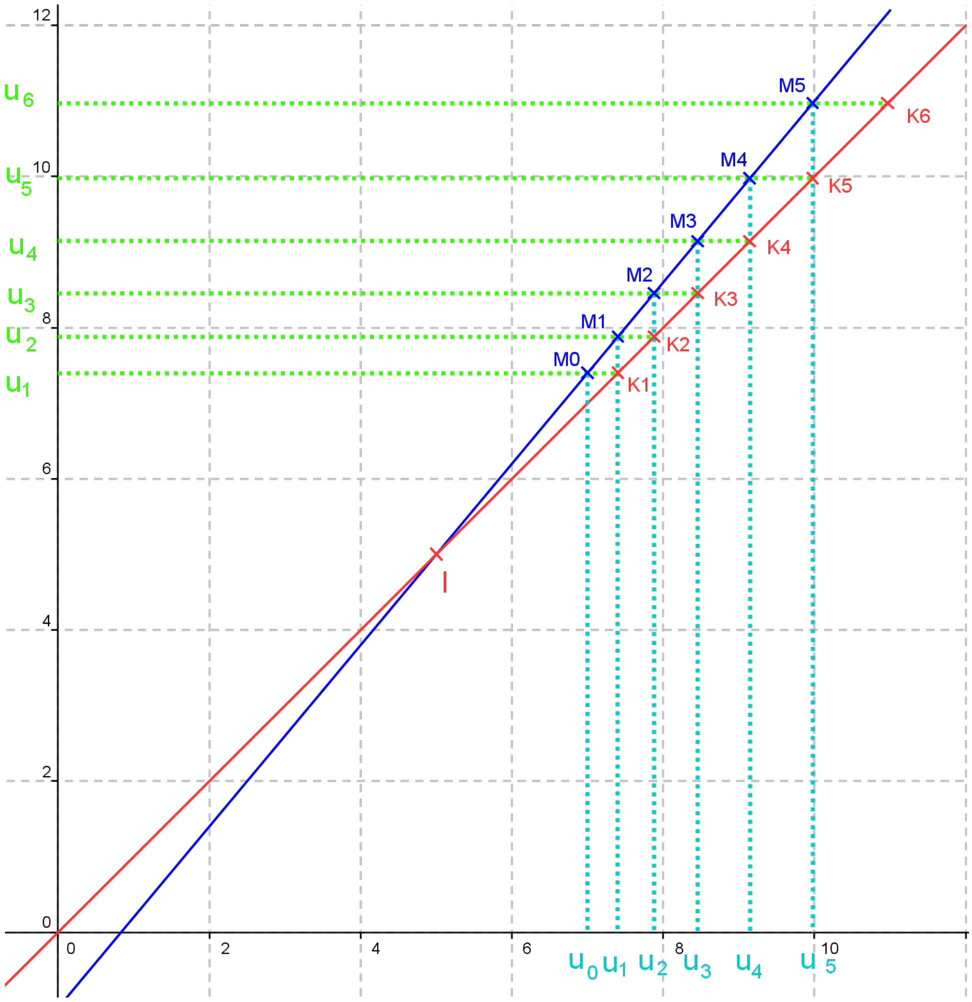
Donc, (v_n) est **la suite géométrique** de **raison** $\boxed{q = 1{,}2}$ et de **premier terme** $\boxed{v_0 = 3}$.

d) Pour tout entier naturel n , $v_n = 3 \times 1{,}2^n$, et donc $u_n = 5 - 3 \times 1{,}2^n$.

$q = 1{,}2 > 1$ donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Donc, la suite (u_n) est **divergente** et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$.

2. a)



Conjectures : (u_n) est **croissante** ; (u_n) est **divergente**.

b) $f(x)=1{,}2x-1$

f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$

On veut démontrer **en utilisant un raisonnement par récurrence** que la suite (u_n) est **strictement croissante**, c'est à dire pour tout entier naturel n , on a $u_n<u_{n+1}$.

Initialisation

$u_0=7$ $\qquad$ $u_1=1{,}2\times 7-1=7{,}4$

$u_0<u_1$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

On suppose que pour tout entier naturel n , $u_n<u_{n+1}$ (hypothèse de récurrence). On doit démontrer que $u_{n+1}<u_{n+2}$.

$u_n<u_{n+1}$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$donc $f(u_n)<f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1}<u_{n+2}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet de conclure que la propriété est vérifiée pour tout entier naturel n , c'est à dire $u_n<u_{n+1}$.

c) Pour tout entier naturel n , $v_n=5-u_n$

$v_{n+1}=5-u_{n+1}$

$v_{n+1}=5-(1{,}2u_n-1)$

$v_{n+1}=6-1{,}2u_n$

$v_{n+1}=6-1{,}2(5-v_n)$

$v_{n+1}=6-6+1{,}2v_n$

$v_{n+1}=1{,}2v_n$

$v_0=5-u_0=5-7=-2$

Donc, (v_n) est **la suite géométrique** de **raison** $\boxed{q=1{,}2}$ et de **premier terme** $\boxed{v_0=-2}$.

d) Pour tout entier naturel n , $v_n=-2\times 1{,}2^n$, et donc $u_n=5+2\times 1{,}2^n$.

$q=1{,}2>1$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$

Donc, la suite (u_n) est **divergente** et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$.

