Exercice

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=-0{,}8\,u_n+9$.

a) Interprétation graphique

b) Étudier les variations de (u_n)

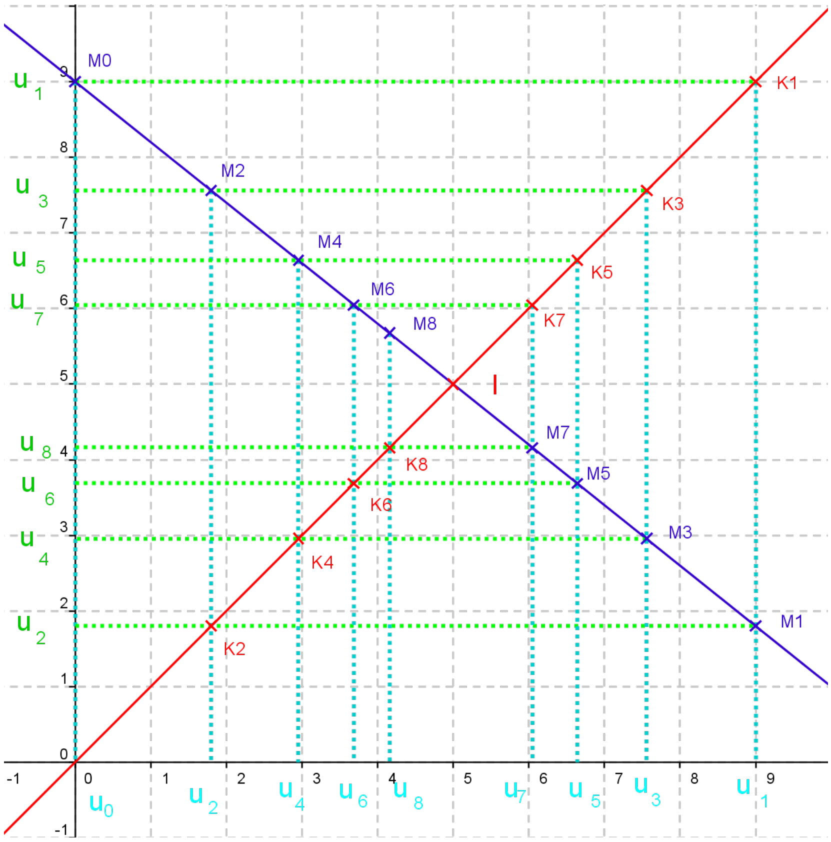
c) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=5-u_n$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

d) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Correction :

a)



Conjectures : (u_n) n'est pas monotone ; (u_n) est convergente.

b) $u_0=0$

$u_1=-0{,}8\,u_0+9=9$

$u_2=-0{,}8\times9+9=1{,}8$

$u_0<u_1$ et $u_1>u_2$

Donc la suite (u_n) n'est pas monotone.

c) Pour tout entier naturel n , $v_n=5-u_n$

$v_{n+1}=5-u_{n+1}$

$v_{n+1}=5-(-0{,}8u_n+9)$

$v_{n+1}=-4+0{,}8\,u_n$

$v_{n+1}=-4+0{,}8(5-v_n)$

$v_{n+1}=-4+4-0{,}8\,v_n$

$v_{n+1}=-0{,}8\,v_n$

$v_0=5-u_0=5-0=5$

Donc, (v_n) est **la suite géométrique** de **raison** $\boxed{q=-0,8}$ et de **premier terme** $\boxed{v_0=5}$.

d) Pour tout entier naturel n , $v_n=5\times(-0,8)^n$, et donc $u_n=5-5\times(-0,8)^n$.

$1<q<1$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

Donc, la suite (u_n) est **convergente** et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5}$.