Fonction logarithme népérien.

1. Généralités

1.1. Rappel

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.
EXP: $\mathbb{R} \rightarrow]0;+\infty[$
$x \longmapsto y = \text{EXP}(x) = e^x$
Pour tout $m \in]0;+\infty[$, il existe x unique réel tel que $e^x = m$

L'application réciproque de EXP est l'application qui a tout élément m de $]0;+\infty[$ associe son unique antécédent x de $\mathbb{R}$.

EXP^{-1}: $]0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$m \longmapsto x = \text{EXP}^{-1}(x)$

1.2. Définition

On nomme **fonction logarithme népérien** la fonction réciproque de la fonction exponentielle, on note cette fonction $\ln$
$\ln :]0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto y = \ln(x)$
Pour $x \in]0;+\infty[$, $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

1.3. Conséquences

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\boxed{e^{\ln(x)} = x}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(e^x) = x}$
$e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln(1) = 0$
$e^1 = e \Leftrightarrow \ln(e) = 1$

1.4. Dérivée

- On admet que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$

Donc, $e^{\ln(x)} \times \ln'(x) = 1$

Donc, $x \times \ln'(x) = 1$

Donc, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

1.5. Propriétés

- Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\frac{1}{x}>0$ donc ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- $\ln(1)=0$

Donc, si $0<x<1$ alors $\ln(x)<\ln(1)=0$
si $1<x$ alors $\ln(1)=0<\ln(x)$

X	0		1		$+\infty$
Signe de Ln (x)	‖	$-$	0	+	

- $\ln(\mathrm{e})=1$

Donc, si $0<x<e$ alors $\ln(x)<\ln(e)=1$
si $e<x$ alors $\ln(e)=1<\ln(x)$

- $0<a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$
- $0<a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$

1.6. Exercices

a) Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes:

$f: x \longmapsto \ln(x^2)$ $\qquad$ $g: x \longmapsto \ln(-2x+4)$

$x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$
$\mathscr{D}_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$x \in \mathscr{D}_g \Leftrightarrow -2\mathrm{x}+4>0 \Leftrightarrow 2>x$
$\mathscr{D}_f=]-\infty;2[$

b) $x \in]0;+\infty[$. Déterminer le signe de $u(x)=\ln(x)-2$.

$2=\ln(\mathrm{e}^2)$

$u(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)-\ln(\mathrm{e}^2)>0 \Leftrightarrow \ln(x)>\ln(e^2) \Leftrightarrow x>\mathrm{e}^2$ (car ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

X	0		e^2		$+\infty$
Signe de u(x)	‖	$-$	0	$+$	

c) Étudier le sens de variation de la fonction f. Sur $]0;+\infty[$, $f: x \longmapsto x\ln(x)-3x$

$$f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}-3=\ln(x)-2=u(x)$$

X	0		e^2		$+\infty$
Signe de f '(x)	‖	$-$	0	$+$	
Variation de f	‖	↘	$-e^2$	↗	

$$f(e^2)=e^{2\ln}(e^2)-3e^2=2e^2-3e^2=-e^2$$

d) Résoudre dans ℝ les équations suivantes.
i. $u^2-u-6=0$
ii. $(\ln(x))^2-\ln(x)-6=0$
iii. $e^{2x}-e^x-6=0$

i. $u^2-u-6=0$

$S_1=\{3;-2\}$

ii. $(\ln(x))^2-\ln(x)-6=0$

$$(\ln(x))^2-\ln(x)-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=\ln(x) \\ u^2-u-6=0 \end{cases}$$

$3=\ln(x) \Leftrightarrow x=e^3$
$-2=\ln(x) \Leftrightarrow x=e^{-2}$

$S_2=\{e^{-2};e^3\}$

iii. $e^{2x}-e^x-6=0$

$$e^{2x}-e^x-6=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-e^x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=e^x \\ u^2-u-6=0 \end{cases}$$

$e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln(3)$ et $e^x=-2$ n'a pas de solution.
$S_3=\{\ln(3)\}$

e) Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes.

i. $u^2-u-6<0$

ii. $(\ln(x))^2-\ln(x)-6<0$

iii. $\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-6<0$

i. Les racines du trinôme sont 2 et -3 donc S=]-3;2[

ii. $(\ln(x))^2-\ln(x)-6<0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=\ln(x) \\ u^2-u-6<0 \end{cases}$

$-3<\ln(x)<2$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-3}<x<\mathrm{e}^2$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ).

Donc $S=]\mathrm{e}^{-3};\mathrm{e}^2[$

iii. $\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-6<0 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x)^2-\mathrm{e}^x-6<0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=\mathrm{e}^x \\ u^2-u-6<0 \end{cases}$

$-3<\mathrm{e}^x<2$

$\Leftrightarrow 0<\mathrm{e}^x<2$

$\Leftrightarrow x<\ln(2)$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

Donc, $S=]-\infty;\ln(2)[$

2. Propriété fondamentale de ln

2.1. Théorème

Pour tous réels strictement positifs, on a:

$$\boxed{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}$$

<u>Démonstration:</u>

Soient a et b deux réels strictement positifs.

$\ln(a)=A \Leftrightarrow a=\mathrm{e}^A$

$\ln(b)=B \Leftrightarrow b=\mathrm{e}^B$

ab est un réel strictement positif.

$\ln(ab)=C \Leftrightarrow ab=\mathrm{e}^C$

$ab=\mathrm{e}^C=\mathrm{e}^A e^B=\mathrm{e}^{A+B} \Leftrightarrow C=A+B$

Donc,

$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

2.2. Conséquences

a) *Logarithme népérien de l'inverse d'un nombre réel strictement positif*

Soit b un réel strictement positif.

$$\ln\left(\frac{1}{b}\times b\right)=\ln(1)=0=\ln\left(\frac{1}{b}\right)+\ln(b)$$

Donc, $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$

> Pour tout réel b strictement positif, on a:
> $$\boxed{\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)}$$

b) *Logarithme népérien d'un quotient de deux nombres réels strictement positifs*

Soient a et b deux réels strictement positifs.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(\frac{a\times 1}{b}\right)=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

> Pour tous réels a et b strictement positifs, on a:
> $$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)}$$

c) *Remarque*

$n\in\mathbb{N}^*$. Soient $a_1;\ldots;a_n$ n nombres réels strictement positifs.
$\ln(a_1\times a_2\times\ldots\times a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\ldots+\ln(a_n)$
(on peut montrer cela par récurrence)

d) *Logarithme népérien d'une puissance*

$n\in\mathbb{N}^*$. a réel strictement positif.
$\ln(a^n)=nln(a)$ (cas particulier de la remarque précédente: $a_1=\ldots=a_n=a$)

$n\in\mathbb{Z}^{-*}$ alors $n=-p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$

$$\ln(a^n)=\ln(a^{-p})=\ln\left(\frac{1}{a^p}\right)=\ln\left(\frac{1}{a}\right)^p=p\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-p\ln(a)=n\ln(a)$$

Pour $n=0$, $\ln(a^0)=\ln(1)=0=0\ln(a)$

Donc:

Pour $n\in\mathbb{Z}$ pour a réel strictement positif, on a:
$$\boxed{\ln(a^n)=n\ln(a)}$$

e) Logarithme népérien d'une racine carrée

a réel strictement positif.
$a=(\sqrt{a})^2$
$\ln(a)=\ln(\sqrt{a})^2=2\ln(\sqrt{a})$
Donc, $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$

a réel strictement positif, on a:
$$\boxed{\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)}$$

f) Logarithme népérien d'une racine $n^{\text{ième}}$

$a\in\mathbb{N}^{+*}$; $n\in\mathbb{N}$; $n\geqslant 2$. L'unique réel x strictement positif tel que $x^n=a$ se nomme racine $n^{\text{ième}}$ de a et se note $\sqrt[n]{a}$.
$(\sqrt[n]{a})^n=a$
Donc, $\ln(a)=\ln(\sqrt[n]{a})^n=n\ln(\sqrt[n]{a})$
Par suite, $\ln(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}\ln(a)$

a réel strictement positif, on a:
$$\boxed{\ln(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}\ln(a)}$$

2.3. Proposition

L'**unique** fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ vérifiant $f'(1)=1$ et pour tous réels a et b strictement positifs, $f(ab)=f(a)+f(b)$ est **la fonction logarithme népérien**.

Démonstration:
$f(a\times 1)=f(a)+f(1)$ donc $f(1)=0$
On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=f(ax)-f(x)$ avec $a>0$
$g(x)=f(a)+f(x)-f(x)=f(a)$.
La fonction g est une fonction constante, donc: $g'(x)=0=af'(ax)-f'(x)$
Pour $x=1$, $0=af'(a)-f'(1)=af'(a)-1$
Donc, $f'(a)=\frac{1}{a}$

On a donc, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)=\frac{1}{x}=\ln'(x)$

On considère h telle que $h(x)=f(x)-\ln(x)$

$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$

Donc, h est constante sur $]0;+\infty[$.
Donc, pour tout réel x strictement positif, $h(x)=f(x)-\ln(x)=k$
Pour $x=1$, $h(1)=k=f(1)-\ln(1)=0$
D'où, $f(x)=\ln(x)$

2.4. Exercices

a) On pose $\ln 2=a$ et $\ln 3=b$. Exprimer en fonction de a et b chacun des nombres suivants: $\ln 6$; $\ln 9$; $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{12}\right)$; $\ln\sqrt{12}$ et $\ln 72$.

$\ln 6=\ln 2+\ln 3=a+b$
$\ln 9=\ln(3^2)=2\ln 3=2b$
$\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 2-\ln 3=a-b$
$\ln\left(\frac{1}{12}\right)=-\ln 12=-\ln(2^2\times 3)=-2\ln 2-\ln 3=-2a-b$
$\ln\sqrt{12}=\frac{1}{2}\ln 12=\frac{1}{2}\ln(2^2\times 3)=\frac{1}{2}\times 2\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3=a+\frac{1}{2}b$
$\ln 72=\ln(2^3\times 3^2)=3\ln 2+2\ln 3=3a+2b$

b) Simplifier chacune des expressions suivantes:
$A=\ln(\sqrt{3}+1)+\ln(\sqrt{3}-1)$; $B=\ln(\sqrt{3}+1)^{18}+\ln(\sqrt{3}-1)^{18}$

$A=\ln(\sqrt{3}+1)+\ln(\sqrt{3}-1)$
$A=\ln((\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1))$
$A=\ln(\sqrt{3}^2-1^2)$
$A=\ln(3-1)$
$A=\ln 2$

$B=\ln(\sqrt{3}+1)^{18}+\ln(\sqrt{3}-1)^{18}$
$B=\ln((\sqrt{3}+1)^{18}(\sqrt{3}-1)^{18})$
$B=\ln(\sqrt{3}^2-1^2)^{18}$
$B=\ln 2^{18}$
$B=18\ln 2$

c) Résoudre dans ℝ les équations suivantes:
(E): $\ln(x+3)(x-2)=\ln 6$

$x\in D_E \Leftrightarrow (x+3)(x-2)>0$
$D_E=]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$

$$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} x\in D_E \\ (x+3)(x-2)=6 \end{cases}$$
$$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} x\in D_E \\ x^2+x-6=6 \end{cases}$$
$$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} x\in D_E \\ x^2+x-12=0 \end{cases}$$

$\Delta=1^2-4\times1\times(-12)=1+48=49$

$x_1=\frac{-1-7}{2}=-4\in D_E$

$x_2=\frac{-1+7}{2}=3\in D_E$

Donc $S_E=\{-4;3\}$

(E'): $\ln(x+3)+\ln(x-2)=\ln 6$

$x\in D_{E'}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3>0\\x-2>0\end{cases}$

$D_{E'}=]2;+\infty[$

$\ln(x+3)+\ln(x-2)=\ln(x+3)(x-2)$

(E')$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_{E'}\\(x+3)(x-2)=6\end{cases}$

Or, $x_1=\frac{-1-7}{2}=-4\notin D_{E'}$ et $x_2=\frac{-1+7}{2}=3\in D_{E'}$

$S_{E'}=\{3\}$

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

(E_1): $\ln(x+3)+\ln(x-2)\leq\ln 6$

$x\in D_{E_1}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3>0\\x-2>0\end{cases}$

$D_{E_1}=]2;+\infty[$

$\ln(x+3)+\ln(x-2)=\ln(x+3)(x-2)$

(E_1)$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_{E_1}\\(x+3)(x-2)\leq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_{E_1}\\x^2+x-12\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_{E_1}\\x\in[-4;3]\end{cases}$

$S_{E_1}=]2;3]$

(E_2): $\ln(x+3)(x-2)\leq\ln 6$

$x\in D_{E_2}\Leftrightarrow(x+3)(x-2)>0$

$D_{E_2}=]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$

(E_2)$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_{E_2}\\(x+3)(x-2)\leq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_{E_2}\\x^2+x-12\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_{E_2}\\x\in[-4;3]\end{cases}$

Donc $S_{E_2}=[-4;-3[\cup]2;3]$

3. Étude et représentation graphique de la fonction logarithme népérien

3.1. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$\ln x > 10 \Leftrightarrow \exp(\ln x) > \exp(10) \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{10}$

Si A est un réel positif (aussi grand que l'on veut)

$x > \mathrm{e}^{A} \Leftrightarrow \ln x > A$

Donc, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$

Soit $x > 0$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Par suite, $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$

3.2. Tableau de variation

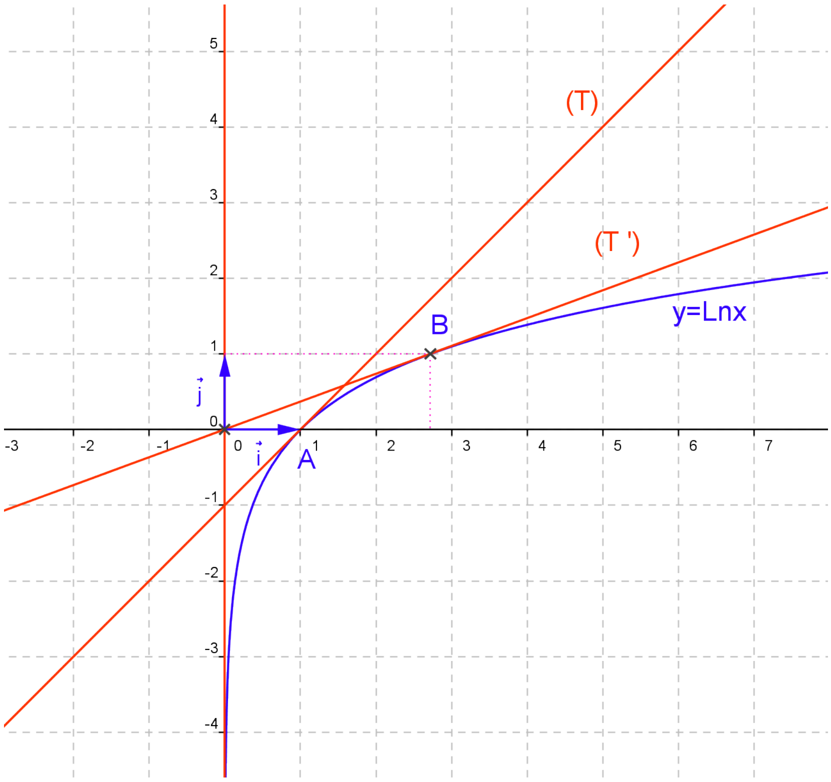
X	0	+∞
Signe de Ln '(x)	‖ +	
Variation de Ln	‖ -∞ ↗	+∞

3.3. Courbe

$\ln'(1) = 1 \quad A(1;0) \quad y = 1(x-1)+0 \quad (T): y = x-1$

$\ln'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}} \quad B(\mathrm{e};1) \quad y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+1 \quad (T'): y = \frac{1}{e}x$

Comme $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe.



3.4. Autres limites

On considère la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=lnx-x+1$

$u'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

X	0	1	$+\infty$
Signe de u '(x)	+	0	−
Variation de u	↗	0	↘

Donc, pour tout x de $]0;+\infty[$, $u(x)\leqslant 0$ soit $\ln x\leqslant x-1$
La courbe représentative de ln est en-dessous de la tangente (T) au point A(1;0))

Conséquence :
Pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln x\leqslant x$

Pour tout x de $[1;+\infty[$, $0\leqslant \ln x\leqslant x$.
On note $X=\sqrt{x}$
Si $x\geqslant 1$ alors $X\geqslant 1$
Donc, $0\leqslant \ln X\leqslant X$
$0\leqslant \ln\sqrt{x}\leqslant\sqrt{x}$
$0\leqslant\frac{1}{2}\ln x\leqslant\sqrt{x}$

$0 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x}$

$0 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$

$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

$$x \ln x = \frac{-\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$

Donc, $\boxed{\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0}$

Soit $x \in]-1;0[\cup \;]0;+\infty[$

$\ln \frac{(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x}$

La fonction logarithme népérien est dérivable en 1 et $(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$

Donc, $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

3.5. Exercices

a) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de ln dans le repère : $(0;\vec{i},\vec{j})$.
Soit $a > 0$ et $A(a;\ln a)$
1. Écrire en fonction de a une équation de la tangente (T) en a à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Démontrer que, quel que soit a , la courbe $\mathscr{C}$ est en-dessous de (T) .

1. $f'(a) = \frac{1}{a}$

$(T): y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln a$

Donc, $(T): y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$

2. $E(x) = \ln x - \left(\frac{1}{a}x + \ln a - 1\right) = \ln x - \frac{1}{a}x - \ln a + 1$

Alors, $E'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax}$

X	0		a		$+\infty$
Signe de E '(x)	||	+	0	$-$	
Variation deE	||	↗	E(a)	↘	

$E(a)=0$
Donc, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $E(x)\leqslant 0$
Donc, la courbe $\mathscr{C}$ est en-dessous de (T).

b) Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'ensemble de définition.

1. $f(x)=x-\ln x$ $\qquad D=]0;+\infty[$
2. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $\qquad D=]0;1[\cup\ ]1;+\infty[$

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

$f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{\ln x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}=-\infty$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} x\ln x=0$

X	0		1		$+\infty$
Signe de xLn x	||	$-$	0	+	

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<1}} f(x)=-\infty$