Exercice propriétés de la fonction ln.

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ les réels suivants :

$A=\ln 8$; $B=\ln\dfrac{1}{16}$; $C=\dfrac{1}{4}\ln 64$; $D=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{64}$; $E=\ln\sqrt{32}$

2. Comparer, sans calculatrice, les réels x et y .

a) $x=\ln 5$ et $y=\ln 2+\ln 3$

b) $x=3\ln 2$ et $y=2\ln 3$

c) $x=1+3\ln \mathrm{e}$ et $y=2\ln \mathrm{e}^2$

d) $x=\ln e^2-1$ et $y=\ln(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}})$

3. Déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $2^n \leqslant 10^3$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-3}$

Correction :

1.
$A = \ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$

$B = \ln \frac{1}{16} = \ln 2^{-4} = -4\ln 2$

$C = \frac{1}{4}\ln 64 = \frac{1}{4}\ln 2^6 = \frac{1}{4}\times 6\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2$

$D = \frac{1}{2}\ln \frac{1}{64} = \frac{1}{2}\ln 2^{-6} = \frac{1}{2}\times(-6)\ln 2 = -3\ln 2$

$E = \ln\sqrt{32} = \frac{1}{2}\ln 32 = \frac{1}{2}\ln 2^5 = \frac{5}{2}\ln 2$

2.

a) $x = \ln 5$ et $y = \ln 2 + \ln 3 = \ln 2\times 3 = \ln 6$
ln est **une fonction strictement croissante** sur $]0;+\infty[$:
5<6 donc $\ln 5 < \ln 6$
Donc, $\boxed{x < y}$

b) $x = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$ et $y = 2\ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$
ln est **une fonction strictement croissante** sur $]0;+\infty[$:
8<9 donc $\ln 8 < \ln 9$
Donc, $\boxed{x < y}$

c) $x = 1 + 3\ln e = 1 + 3\times 1 = 4$ et $y = 2\ln e^2 = 2\times 2\times \ln 2 = 2\times 2\times 1 = 4$
Donc, $\boxed{x = y}$

d) $x = \ln e^2 - 1 = 2\ln e - 1 = 2\times 1 - 1 = 1$ et $y = \ln(e\sqrt{e}) = \ln e + \ln\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}\ln e = 1 + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{3}{2}$
Donc, $\boxed{x < y}$

3.
a) $2^n \leqslant 10^3$
$\Leftrightarrow \ln 2^n \leqslant \ln 10^3$
$\Leftrightarrow n\ln 2 \leqslant 3\ln 10$

Or, $\ln 2 > \ln 1$ donc $\ln 2 > 0$

$2^n \leqslant 10^3$
$\Leftrightarrow n \leqslant \frac{3\ln 10}{\ln 2}$
Avec la calculatrice, on trouve : $\frac{3\ln 10}{\ln 2} \approx 9{,}97$
Donc :
$2^n \leqslant 10^3 \Leftrightarrow \boxed{n \leqslant 9}$
L'ensemble cherché est **l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9**.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-3}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant \ln\left(10^{-3}\right)$

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant -3\ln 10$

$\Leftrightarrow -n\ln 3 \leqslant -3\ln 10$

Or, $-\ln 3 < 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-3}$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{3\ln 10}{\ln 3}$

Avec la calculatrice, on trouve : $\frac{3\ln 10}{\ln 3} \approx 6{,}29$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow \boxed{n \geqslant 7}$

L'ensemble cherché est **l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 7**.