

Exercice **ensembles de définition**

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ et $g(x) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$

b) $f(x) = \ln(2x^2 - x + 1)$ et $g(x) = \ln(-x^2 + 2x - 2)$

c) $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 2)$ et $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3x-2}\right)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{2x^2 + x - 3}{4x - 1}\right)$ et $g(x) = \ln\left(\frac{-4x + 1}{2x^2 + x - 3}\right)$

Correction :

Pour toutes les fonctions, on notera D l'ensemble de définition.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

On pose $u(x) = x^2 - 1$
 $f(x) = \ln(u(x))$

$x \in D \Leftrightarrow u(x) > 0$

$u(x)$ est un trinôme dont les racines sont 1 et -1.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
signe de $x^2 - 1$	+	0	-	0	+

$D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$g(x) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$

$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$

$D =]1; +\infty[$

b) $f(x) = \ln(2x^2 - x + 1)$

$u(x) = 2x^2 - x + 1$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ et $2 > 0$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$

$D = \mathbb{R}$

$g(x) = \ln(-x^2 + 2x - 2)$

$u(x) = -x^2 + 2x - 2$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = -4 < 0$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) < 0$

$D = \emptyset$

c) $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 2)$

$u(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{5+1}{6} = 1$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
signe de u(x)	+	0	-	+

$$D =]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]1; +\infty[$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3x-2}\right)$$

$$q(x) = \frac{x-1}{3x-2}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$	
signe de q(x)	+		-	0	+

$$D =]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]1; +\infty[$$

$$d) f(x) = \ln\left(\frac{2x^2+x-3}{4x-1}\right)$$

$$\text{On pose } q(x) = \frac{2x^2+x-3}{4x-1}$$

$$u(x) = 2x^2+x-3$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$		
signe de $2x^2+x-3$	+	0	-	0	+		
signe de $4x-1$		-	0		+		
signe de q(x)	-	0	+		-	0	+

$$4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$D = \left] \frac{-3}{2}; \frac{1}{4} \right[\cup] 1; +\infty [$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{-4x+1}{2x^2+x-3}\right)$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
signe de $2x^2+x-3$	+	0	-	0	+
signe de $-4x+1$		+	0	-	
signe de Q(x)	+	-	0	+	-

$$D = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{4}; 1 \right[$$