Exercice Résolution d'équations et d'inéquations.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes.

1. $\ln(x-2)=\ln(4x-5)$
2. $\ln(3x-4)=\ln(x^2-4)$
3. $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$
4. $\ln(x-2)\leqslant\ln(2x-1)$
5. $\ln(2-x)+1\geqslant 0$
6. $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

Correction :

1. $\ln(x-2)=\ln(4x-5)$

On note D l'ensemble de définition de l'équation.

$$x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ 4x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$\boxed{D=]2;+\infty[}$

$$\ln(x-2)=\ln(4x-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x-2=4x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x-4x=2-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ -3x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x=1 \end{cases}$$

Or, $1\notin D$, donc $\boxed{S=\emptyset}$

2. $\ln(3x-4)=\ln(x^2-4)$

On note D l'ensemble de définition de l'équation.

$$x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4>0 \\ x^2-4>0 \end{cases}$$

Or, $3x-4>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{4}{3}$

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

$\boxed{D=]2;+\infty[}$

$$\ln(3x-4)=\ln(x^2-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ 3x-4=x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x=0\ ou\ x=3 \end{cases}$$

Or, $0\notin D$, donc $\boxed{S=\{3\}}$

3. $\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$

On note D l'ensemble de définition de l'équation.

$$x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+6>0 \\ x+11>0 \end{cases}$$

$u(x)=x^2+5x+6$

$\Delta=5^2-4\times1\times6=1$

$x_1=\dfrac{-5-1}{2}=-3$ et $x_2=\dfrac{-5+1}{2}=-2$

$x^2+5x+6>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[\cup]-2;+\infty[$

$x+11>0 \Leftrightarrow x>-11$

$\boxed{D=]-11;-3[\cup]-2;+\infty[}$

$\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11) \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x^2+5x+6=x+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x^2+4x-5=0 \end{cases}$

$x^2+4x-5=0$
$\Delta=4^2-4\times1\times(-5)=16+20=36$
$x'=\dfrac{-4-6}{2}=-5$ et $x''=\dfrac{-4+6}{2}=1$

$-5\in D$ et $1\in D$, donc $\boxed{S=\{-5;1\}}$

4. $\ln(x-2)\leqslant\ln(2x-1)$

On note D l'ensemble de définition de l'équation.
$x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\boxed{D=]2;+\infty[}$

$\ln(x-2)\leqslant\ln(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x-2\leq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ -1\leq x \end{cases}$

$\boxed{S=]2;+\infty[}$

5. $\ln(2-x)+1\geqslant0$

On note D l'ensemble de définition de l'équation.
$x\in D \Leftrightarrow 2-x>0 \Leftrightarrow x<2$

$D=]-\infty;2[$

$\ln(2-x)+1\geqslant0$
$\Leftrightarrow \ln(2-x)+\ln(\mathrm{e})\geqslant0$
$\Leftrightarrow \ln(2-x)\geqslant-\ln(\mathrm{e})$
$\Leftrightarrow \ln(2-x)\geqslant\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ 2-x\geq\dfrac{1}{e} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in D \\ x\leq 2-\dfrac{1}{e} \end{cases}$

$\boxed{S=\left[2-\dfrac{1}{\mathrm{e}};2\right[}$

6. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

$\boxed{S =]0;+\infty[}$

$$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X^2 - 2X - 3 = 0 \end{cases}$$

$X^2 - 2x - 3 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-3) = 16$
$X_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$

$\ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{e} \in D$
$\ln x = 3 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^3 \in D$

$\boxed{S = \{\dfrac{1}{\mathrm{e}} ; \mathrm{e}^3\}}$