Exercice calcul de fonctions dérivées.

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\ln(x^2)$

b) $f(x)=(\ln x)^2$

c) $f(x)=x\ln x-x$

d) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

e) $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Correction :

Rappel : Si u est strictement positive et dérivable sur l'intervalle I et si $f(x)=\ln(u(x))$ alors f est dérivable sur I et $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

a) $f(x)=\ln(x^2)$

$x \in D \Leftrightarrow x^2>0$
Donc, $\boxed{D=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$
$u(x)=x^2$ et $u'(x)=2x$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}}$$

b) $f(x)=(\ln x)^2$

$\boxed{D=]0;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$
$$\boxed{f'(x)=2\times\ln x\times\frac{1}{x}=2\frac{\ln x}{x}}$$

c) $f(x)=x\ln x-x$

$\boxed{D=]0;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$
$$\boxed{f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x}$$

d) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$\boxed{D=]0;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$
$$\boxed{f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}}$$

e) $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$x \in D \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}>0$

Donc, $\boxed{D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$

$u(x)=\frac{x-1}{x+1}$

$u'(x)=\frac{1\times(x+1)-1\times(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2}{(x+1)^2}\div\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}}$$