Exercice Déterminer l'équation d'une asymptote oblique.

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x+1+\dfrac{\ln x}{x}$

2. $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)$

3. $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

<u>Correction :</u>

1. $f(x)=x+1+\dfrac{\ln x}{x}$

$\boxed{D=]0;+\infty[}$

$f(x)-(x+1)=\dfrac{\ln x}{x}$

et, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc la droite d'équation $\boxed{y=x+1}$ est **<u>asymptote oblique à la courbe représentative</u>** de $y=x+\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en $+\infty$.

2. $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)$

$x\in D \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2\mathrm{x}+3}>0$

Donc, $\boxed{D=\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[\cup]1;+\infty[}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+x}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$f(x)=x+\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$f(x)-\left(x+\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

Donc, la droite d'équation $\boxed{y=x+\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}$ est **<u>asymptote oblique à la courbe représentative</u>** de f en $+\infty$.

La droite d'équation $\boxed{y=x+\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}$ est aussi **<u>asymptote oblique à la courbe représentative</u>** de f en $-\infty$.

3. $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

$$x\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \end{cases}$$

$\boxed{D=]0;+\infty[}$

Nous avons une forme indéterminée en $+\infty$.

$$\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln 1=0$

$$f(x)-x=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=0$

Donc, la droite d'équation $\boxed{y=x}$ est **asymptote oblique à la courbe représentative** de f en $+\infty$.