Exercice Études de fonctions.

Étudier les fonctions suivantes. Tracer leurs représentations graphiques dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. $f(x)=x\ln x$

2. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

3. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

4. $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

Correction :

1. $f(x)=x\ln x$

$\boxed{D=]0;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$

$f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$\ln x+1\geqslant 0 \iff \ln x\geqslant -1$

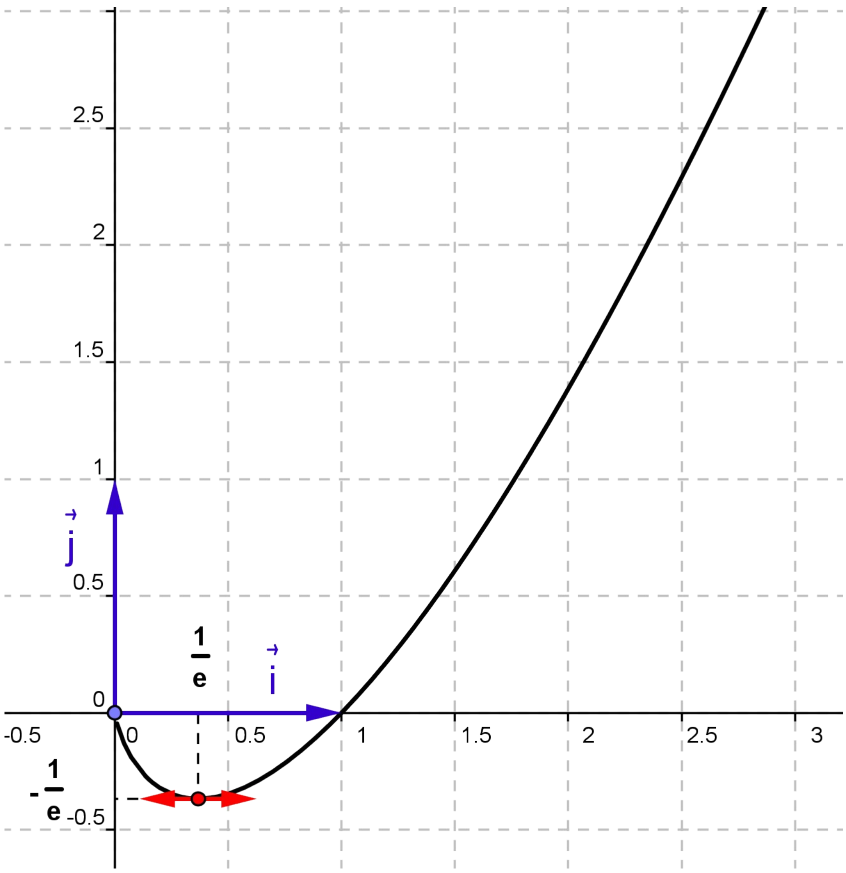
Or, $-1=\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

$\ln x+1\geqslant 0 \iff \ln x\geqslant \ln\left(\frac{1}{e}\right) \iff x\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\ln x+1<0 \iff \ln x<\ln\left(\frac{1}{e}\right) \iff 0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln x=0$ (voir démonstration dans le cours)

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
signe de f ' (x)		$-$	0	$+$	
variation de f(x)	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$



2. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

$\boxed{D=]0;1[\cup]1;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{-1\times\ln x-x\times\frac{1}{x}}{(x\ln x)^2}=\frac{-\ln x-1}{(x\ln x)^2}$$

$$-\ln x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln x\geqslant 1 \Leftrightarrow \ln x\leqslant -1=\ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow 0<x\leqslant\frac{1}{e}$$

$$-\ln x-1<0 \Leftrightarrow -\ln x<1 \Leftrightarrow \ln x>-1=\ln\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$$

Le signe de $x\ln x$ est le signe de $\ln x$

Si $0<x<1$ alors $x\ln x<0$

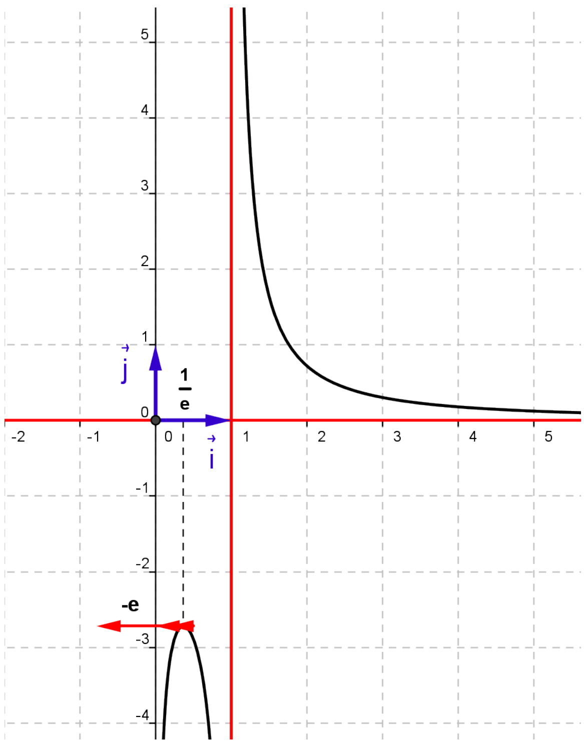
Si $x>1$ alors $x\ln x>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

Les droites d'équation $\boxed{x=0}$ et $\boxed{x=1}$ sont **des asymptotes à la courbe représentative** de f.

La droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote horizontale à la courbe représentative** de f en $+\infty$.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
signe de f ' (x)	||	+	0	−	||	−	
variation de f(x)	|| $-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0



3. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$\boxed{D=]0;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$

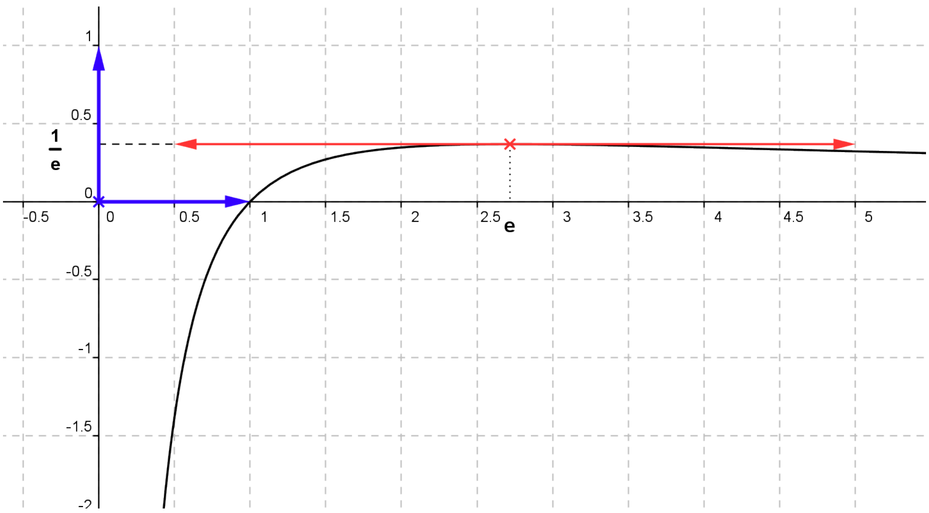
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$1-\ln x\geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln x\geqslant -1 \Leftrightarrow \ln x\leqslant 1=\ln e \Leftrightarrow 0<x\leqslant \mathrm{e}$
$1-\ln x<0 \Leftrightarrow -\ln x<-1 \Leftrightarrow \ln x>1=\ln e \Leftrightarrow x>\mathrm{e}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

La droite d'équation $\boxed{x=0}$ est **une asymptote verticale** et la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote horizontale à la courbe représentative** de f.

x	0		e		$+\infty$
signe de f ' (x)	||	+	0	−	
variation de f(x)	|| -∞	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



4. $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$\boxed{D=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[}$

f est **dérivable** sur $]-\infty;-1[$ et sur $]0;+\infty[$.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{1\times(x+1)-1\times x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\div\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$$

Pour tout réel de D, $f'(x)>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=0$$
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x+1}=+\infty \text{ donc } \lim_{x\to-1^+}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x+1}=0 \text{ donc } \lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=-\infty$$

Les droites d'équation $\boxed{x=-1}$ et $\boxed{x=0}$ sont **des asymptotes verticales à la courbe représentative** de f.
La droite d'équation $\boxed{y=0}$ est **une asymptote horizontale à la courbe représentative** de f en $+\infty$ et $-\infty$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de f ' (x)		+	‖		‖	+	
variation de f(x)	0	↗	$+\infty$ ‖		‖ $-\infty$	↗	0