Exercice Polynésie juin 2001. Problème partie A et B.

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln e = 1$. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x + xe}{x^2}$.

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=-2\ln x - xe + 1$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g .
3. Montrer que dans [0,5;1] l'équation $g(x)=0$ admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.
3. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.
4. Donner le tableau de variations de f .
5. Construire Γ

Correction :

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1.
$\lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe+1=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty}$
$\lim\limits_{x\to0^+} -2\ln x=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+} -xe+1=0+1=1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty}$

2.
g est **dérivable** sur $]0;+\infty[$.
$g'(x)=-2\times\frac{1}{x}-e=\frac{-2}{x}-\mathrm{e}<0$
g est **strictement décroissante** sur $]0;+\infty[$.

3.
g est **continue** et **strictement décroissante** sur [0,5;1].
$g(0{,}5)\approx1{,}03>0$ et $g(1)\approx-1{,}72<0$
Donc, il **existe** $\boxed{\alpha}$ unique appartenant à [0,5;1] tel que $\boxed{g(\alpha)=0}$.
En utilisant une calculatrice, on obtient $\boxed{0{,}6<\alpha<0{,}7}$

4.
g est **strictement décroissante** sur $]0;+\infty[$.
Si $0<x<\alpha$ alors $g(x)>g(\alpha)=0$
Si $\alpha<x$ alors $g(\alpha)=0>g(x)$

x	0		α		+∞
signe de g(x)	‖	+	0	−	

Partie B : Étude de la fonction *f*
1.
$f(x)=\frac{\ln x+xe}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{\mathrm{e}}{x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{x}=0$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x+xe=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^2=0^+$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty}$

2.
f est **dérivable** sur $]0;+\infty[$.
$$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+\mathrm{e}\right)-2x(\ln x+xe)}{x^4}=\frac{x(1+ex-2\ln x-2xe)}{x^4}=\frac{-2\ln x-xe+1}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$
Le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Donc, f est **strictement croissante** sur $\boxed{]0;\alpha[}$ et **strictement décroissante** sur $\boxed{]\alpha;+\infty[}$

3.

$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow -2\ln\alpha-\alpha e+1=0$

Donc, $\ln\alpha=\frac{-1}{2}\alpha e+\frac{1}{2}$

$$\boxed{f(\alpha)=\frac{\ln\alpha+\alpha e}{\alpha^2}=\frac{\frac{-1}{2}\alpha e+\frac{1}{2}+\alpha e}{\alpha^2}=\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}}$$

4.

x	0		α		+∞
signe de f ' (x)	‖	+	0	–	
variation de f	‖ -∞	↗	f(α)	↘	0

5.

La droite d'équation $\boxed{x=0}$ est **une asymptote verticale à la courbe**.